

Órai feladatok

1. Számítsuk ki az $f(z)$ függvény integrálját a megadott \mathcal{G} görbe mentén:

- a) $f(z) = \operatorname{Re}(z + z^2)$, \mathcal{G} a $y = x^2$ ($0 \leq x \leq 1$) egyenletű parabola a komplex síkon, és az iránya az x növekedésének iránya;
 b) $f(z) = 3z^2 + 2z$, \mathcal{G} az $1 - i$, $2 - i$, $2 + i$ pontokat összekötő törtvonal.
 c) $f(z) = iz^2 - 2\bar{z}$, $\mathcal{G} : |z| = 2$, $\operatorname{Re} z \geq 0$, $\operatorname{Im} z \geq 0$, a kör negatív irányítása szerint.

(a) $z(t) = t + it^2$, ahol $0 \leq t \leq 1$. $z'(t) = 1 + 2ti$, $f(z(t)) = t + t^2 - t^4$, és $\int_{\mathcal{G}} f(z) dz = \int_0^1 (t + t^2 - t^4) + 2i(t^2 + t^3 - t^5) dt = \frac{19}{30} + \frac{5}{6}i$.

b) f -nek van primitív függvénye, $z^3 + z^2$, így $\int_{\mathcal{G}} f(z) dz = [z^3 + z^2]_{1-i}^{2+i} = 7 + 19i$.

c) $z(t) = 2e^{it}$ ($\frac{\pi}{2} \geq t \geq 0$), $z'(t) = 2ie^{it}$, $f(z(t)) = 4ie^{2it} - 4e^{-it}$, $\int_{\mathcal{G}} f(z) dz = \int_{\pi/2}^0 -8e^{3it} - 8i dt = -\frac{8}{3} + (\frac{8}{3} - 4\pi)i$.

2. A Cauchy-féle integrálformula segítségével számítsuk ki a következő integrálokat:

a) $\oint_{\mathcal{G}} \frac{\cos z}{z^2 + iz} dz$, ahol \mathcal{G} a $-i$ középpontú, $\frac{1}{2}$ sugarú kör, pozitív körüljárással;

b) $\oint_{\mathcal{G}} \frac{\operatorname{ch} z}{z^5} dz$, ahol \mathcal{G} egy origó középpontú kör, negatív körüljárással;

c) $\oint_{\mathcal{G}} \frac{e^z}{z^4 - z^3} dz$, ahol \mathcal{G} a $|z - 2| = 3$ egyenletű kör, pozitív irányban;

d) $\oint_{\mathcal{G}} \frac{e^{\pi z}}{(z - i)^2(z + 1)} dz$, ahol \mathcal{G} a $-2, 1 + 2i, 1 - 2i$ csúcsú háromszögvonal.

(a) Az integrandus szingularitásai 0 és $-i$, ezek közül csak $-i$ van a kör belsejében. Így az integrál a Cauchy-féle integrálformula szerint $\oint_{\mathcal{G}} \frac{\cos z}{z + i} dz = \frac{2\pi i}{0!} \frac{\cos z}{z} \Big|_{z=-i} = -2\pi \operatorname{ch} 1$.

b) Negatív a körüljárás, így az integrál $-\frac{2\pi i}{4!} (\operatorname{ch} z)^{(4)} \Big|_{z=0} = -\frac{\pi}{12}i$

c) Az integrandus szingularitásai 0 és 1 , mindkettő a kör belsejében van. Legyen \mathcal{G}_0 és \mathcal{G}_1 a két szingularitást körüljáró, a \mathcal{G} belsejében levő, egymást nem metsző két kör, a \mathcal{G} -vel megegyező, tehát pozitív irányítással. $\oint_{\mathcal{G}_0} \frac{e^z}{z^3(z-1)} dz = \oint_{\mathcal{G}_0} \frac{e^z}{z^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} \left(\frac{e^z}{z-1} \right)' \Big|_{z=0} = \frac{2\pi i}{2!} \frac{e^z(z-1)^2 - 2e^z(z-2)}{(z-1)^3} \Big|_{z=0} = -5\pi i$, $\oint_{\mathcal{G}_1} \frac{e^z}{z^3(z-1)} dz = \oint_{\mathcal{G}_1} \frac{e^z}{z-1} dz = \frac{2\pi i}{0!} \frac{e^z}{z^3} \Big|_{z=1} = 2\pi e i$.
 Összesítve $\oint_{\mathcal{G}} f(z) dz = (2\pi e - 2\pi)i$.

d) Az integrandus szingularitásai i és -1 , mindkettő benne van a megadott (negatív irányítású) háromszögtartományban. Legyen \mathcal{G}_i egy i körüli, \mathcal{G}_{-1} egy -1 körüli negatív irányítású kis kör.

$$\oint_{\mathcal{G}_i} \frac{e^{\pi z}}{(z - i)^2(z + 1)} dz = \oint_{\mathcal{G}_i} \frac{\frac{e^{\pi z}}{z+1}}{(z - i)^2} dz = -\frac{2\pi i}{1!} \left(\frac{e^{\pi z}}{z + 1} \right)' \Big|_i = -2\pi i \frac{\pi e^{\pi z}(z + 1) - e^{\pi z}}{(z + 1)^2} \Big|_i = -2\pi i \frac{-\pi(1 + i) + 1}{(1 + i)^2} = (\pi^2 - \pi) + \pi^2 i.$$

$$\oint_{\mathcal{G}_{-1}} \frac{e^{\pi z}}{(z-i)^2(z+1)} dz = \oint_{\mathcal{G}_{-1}} \frac{\frac{e^{\pi z}}{(z-i)^2}}{z+1} dz = -\frac{2\pi i}{0!} \frac{e^{\pi z}}{(z-i)^2} \Big|_{-1} = -\pi e^{-\pi}.$$

Így \mathcal{G} -n az integrál $(\pi^2 - \pi - \pi e^{-\pi}) + \pi^2 i$.

Gyakorló feladatok

- Számítsuk ki az $f(z) = \frac{z+2}{z}$ függvény integrálját a $|z| = 2$, $\text{Im } z \leq 0$ körív mentén, pozitív forgásiránnyal;
- A Cauchy-féle integrálformula segítségével számítsuk ki a következő integrálokat:
 - $\oint_{\mathcal{G}} \frac{1}{z(z^2-1)} dz$, ahol $\mathcal{G} : |z-1| = \frac{3}{2}$, pozitív irányban;
 - $\oint_{\mathcal{G}} \frac{1}{1+z^2} dz$, ahol \mathcal{G} a $|z| = 2$ egyenletű kör, pozitív irányban;
 - $\oint_{\mathcal{G}} \frac{\sin z}{(z-\frac{\pi i}{2})^3} dz$, ahol \mathcal{G} a $|z-1| + |z+1| = 4$ egyenletű ellipszis, pozitív irányban.

Megoldások

$$1. \quad z(t) = 2e^{it} \quad (\pi \leq t \leq 2\pi), \quad \int_{\pi}^{2\pi} \frac{2e^{it} + 2}{2e^{it}} (2ie^{it}) dt = \int_{\pi}^{2\pi} 2ie^{it} + 2i dt = [2e^{it} + 2it]_{\pi}^{2\pi} = 2e^{2\pi i} - 2e^{\pi i} + 2\pi i = 2 - (-2) + 2\pi i = 4 + 2\pi i.$$

2. c) Az integrandus szingularitásai $0, \pm 1$ (a nevező $z(z-1)(z+1)$, a számláló pedig reguláris), és ezek közül 0 és 1 vannak a körön belül, tehát az integrált helyettesíthetjük egy 0 körüli (\mathcal{G}_0) és egy 1 körüli (\mathcal{G}_1) kis körön vett integrál összegével.

$$\oint_{\mathcal{G}_0} \frac{1}{z(z^2-1)} dz = \oint_{\mathcal{G}_0} \frac{\frac{1}{z^2-1}}{z} dz = \frac{2\pi i}{0!} \frac{1}{z^2-1} \Big|_{z=0} = -2\pi i.$$

$$\oint_{\mathcal{G}_1} \frac{1}{z(z^2-1)} dz = \oint_{\mathcal{G}_1} \frac{\frac{1}{z^2+z}}{z-1} dz = \frac{2\pi i}{0!} \frac{1}{z^2+z} \Big|_{z=1} = \pi i.$$

Így a \mathcal{G} körön vett integrál $-2\pi i + \pi i = -\pi i$.

e) Az integrandus szingularitásai $\pm i$ (a nevező $z^2+1 = (z+i)(z-i)$, a számláló reguláris), és mindkettő benne van a görbe által bezárt tartományban. Legyen \mathcal{G}_i egy i körüli, \mathcal{G}_{-i} egy $-i$ körüli kis kör.

$$\oint_{\mathcal{G}_i} \frac{1}{(z+i)(z-i)} dz = \oint_{\mathcal{G}_i} \frac{\frac{1}{z+i}}{z-i} dz = \frac{2\pi i}{0!} \frac{1}{z+i} \Big|_i = \pi.$$

$$\oint_{\mathcal{G}_{-i}} \frac{1}{(z+i)(z-i)} dz = \oint_{\mathcal{G}_{-i}} \frac{\frac{1}{z-i}}{z+i} dz = \frac{2\pi i}{0!} \frac{1}{z-i} \Big|_{-i} = -\pi.$$

Így a \mathcal{G} -n az integrál 0 .

g) Az integrandus egyetlen szingularitása $\frac{\pi i}{2}$, és ez az ellipszis belsejébe esik, mert

$$\left| -1 + \frac{\pi i}{2} \right| + \left| 1 + \frac{\pi i}{2} \right| = 2\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4}} < 4. \quad \oint_{\mathcal{G}} \frac{\sin z}{(z - \frac{\pi i}{2})^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} (\sin z)'' \Big|_{\pi i/2} = \pi i (-\sin z) \Big|_{\pi i/2} =$$
$$-\pi i \sin \frac{\pi i}{2} = \pi \operatorname{sh} \frac{\pi}{2}.$$