Órai feladatok

1. Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenletek típusát (explicit-e vagy implicit, milyen rendű, illetve fokú, homogén vagy inhomogén)!

a) $y' = 3y''' - (\operatorname{tg} x)y' + \operatorname{ch} x$ b) $y'' = e^y \ln x$ c) $y'' = y^2 y' \cos x$

(a) Implicit, harmadrendű, elsőfokú, inhomogén.
b) Explicit, másodrendű, nincs foka.
c) Explicit, másodrendű, harmadfokú, homogén.)

2. Oldjuk meg a következő (szétválasztható) differenciálegyenleteket, illetve kezdetiérték-problémákat!

a) $xyy' + y^2 - 1 = 0$
b) $(2x+1)y' - 3y = 0, \ \ y(4) = 6$

(a) A differenciálegyenlet $y \not\equiv \pm 1$ esetén $\frac{y'y}{y^2-1} = -\frac{1}{x}$ alakra hozható, amiből integrálással $\frac{1}{2}\ln|y^2-1| = -\ln|x| + C$. Ezt tovább alakítva $\ln\sqrt{|y^2-1|} = \ln\frac{e^C}{|x|}$, azaz $y^2 - 1 = \pm\frac{e^{2C}}{x^2}$, vagyis $y = \pm\sqrt{1 + \frac{A}{x^2}}$, ahol $A \in \mathbb{R}$ tetszőleges választása a korábban talált $y \equiv \pm 1$ esetet is magában foglalja.
b) Ha $y \not\equiv 0$, akkor a differenciálegyenlet $\frac{y'}{y} = \frac{3}{2x+1}$ alakra hozható. Ebből $\ln|y| = \frac{3}{2}\ln|2x+1| + C$, tehát $y = A|2x+1|^{3/2}$ ($A \in \mathbb{R}$ tetszőleges). A kezdeti feltételt az $A = \frac{2}{9}$ paraméter elégíti ki, és $x = 4$ közelében $2x+1 > 0$, így a megoldás $y = \frac{2}{9}(2x+1)^{3/2}$.)

3. Ha a differenciálegyenlet $y' = g(y/x)$ alakra hozható, akkor $z = y/x$ függvény bevezetésével szétválaszthatóvá tehető. Oldjuk meg ennek segítségével az $2xyy' = y^2 - x^2, \ \ y(1) = 1$ kezdetiérték-problémát!

(xy-nal leosztva $2y' = (y/x) - \frac{1}{(y/x)}$, tehát a differenciálegyenlet $y' = g(y/x)$ alakra hozható. $z = (y/x)$ (azaz $y = zx$) helyettesítésnél $y' = z'x + z$, és így a $2z'x + 2z = z + \frac{1}{z}$ differenciálegyenlethez jutunk, amely szétválasztható, és a megoldása $z = \sqrt{\frac{A}{x} - 1}$, ahol $A \neq 0$, és ebből $y = x\sqrt{\frac{A}{x} - 1}$. Az $y(1) = 1$ kezdeti feltételt $A = 2$-vel elégíti ki a megoldás, tehát a keresett függvény $y = x\sqrt{\frac{2}{x} - 1}$.)

4. Oldjuk meg a következő elsőrendű lineáris differenciálegyenleteket!

a) $y' - \dfrac{1}{x}y = x^2$
b) $y' + y = e^{-x}$

(a) Állandók variálásával: A homogén (szétválasztható) $y' - \frac{1}{x}y = 0$ differenciálegyenlet megoldása $y = Ax$, tehát az eredeti egyenlet megoldását $y = A(x)y$ alakban keressük. Ezt behelyettesítva a differenciálegyenletbe azt kapjuk, hogy $A'(x)x + A(x) - A(x) = x^2$, amiből $A(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$, tehát $y = \frac{1}{2}x^3 + Cx$.
Másik megoldás: Az $y' + p(x)y = q(x)$ egyenletet $e^{P(x)}$-szel (ahol $P(x)$ az $p(x)$ primitív függvénye) beszorozzuk, és így a bal oldalon az $ye^{P(x)}$ deriváltját kapjuk. Ebben az esetben $e^P(x) = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$, és így $(y\frac{1}{x})' = x$, amiből $y\frac{1}{x} = \frac{1}{2}x^2 + C$, tehát $y = \frac{1}{2}x^3 + Cx$.
b) Az a) részben említettek közül a második módszer szerint e^x-szel szorozzuk be az egyenletet: $(e^x y)' = 1$, amiből $e^x y = x + C$, tehát $y = xe^{-x} + Ce^{-x}$.)

5. Melyek egzaktak az alábbi differenciálegyenletek közül? Az egzaktakat oldjuk meg!

a) $x^3 - 3xy^2 + (y^2 - 3x^2y)y' = 0, \;\; y(1) = 1$

b) $(1 - xy) + (xy - x^2)y' = 0$

c) $\ln y + ye^x + 2 + (\frac{x}{y} + e^x - \operatorname{ch} y)y' = 0$

(a) $P(x, y) = x^3 - 3xy^2$ és $Q(x, y) = y^2 - 3x^2y$ kétváltozós függvényekkel $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ alakú. $P_y = Q_x = 6xy$, így a differenciálegyenlet egzakt, azaz (P, Q)-nak mint $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ függvénynek van potenciálfüggvénye. Az egyik potenciálfüggvény $u(x, y) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{1}{3}y^3$, így a differenciálegyenlet megoldása az $u(x, y) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{1}{3}y^3 = C$ implicit egyenlettel megadott y valamely C konstansra. A kezdeti feltétel miatt $C = -\frac{11}{12}$. b) Nem egzakt: $P_y = -x$ és $Q_x = y - 2x$. c) Egzakt: $P_y = Q_x = \frac{1}{y} + e^x$. A megoldása $u(x, y) = C$, ahol u a $(P(x, y), Q(x, y))$ vektor-vektorfüggvény egyik potenciálfüggvénye. $u_x = P$-ből $u = x \ln y + ye^x + 2x + g(y)$ valamely $g(y)$ függvényre, és $u_y = \frac{x}{y} + e^x + g'(y) = \frac{x}{y} + e^x - \operatorname{ch} y$, tehát $g(y) = -\operatorname{sh} y$, és ezzel $u(x, y) = x \ln y + ye^x + 2x - \operatorname{sh} y$ megfelelő. A differenciálegyenlet y megoldását az $x \ln y + ye^x + 2x - \operatorname{sh} y = C$ implicit egyenlet adja meg tetszőleges C konstanssal.)

6. Oldjuk meg az alábbi hiányos másodrendű differenciálegyenleteket:

a) $y'' - \frac{x}{x^2-1}y' = 0, \;\; y(0) = 0, \; y'(0) = 1$

b) $2yy'' = (y')^2$.

(a) Mivel y nem szerepel a differenciálegyenletben, csak a deriváltjai, helyettesíthetjük y'-t egy $z(x)$ függvénnyel, és erre egy elsőrendű, szétválasztható differenciálegyenletet kapunk: $z' - \frac{x}{x^2-1}z = 0$. Ennek a megoldása $z = A\sqrt{|x^2 - 1|}$. Mivel $z(0) = y'(0) = 1$, $A = 1$, és $|x^2 - 1| = 1 - x^2$ a megadott pont közelében. Tehát $y' = z = \sqrt{1 - x^2}$. Ebből integrálással ($x = \sin u$ helyettesítéssel) $y = \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1 - x^2} + C$. Az $y(0) = 0$ kezdeti feltétel miatt $C = 0$, és $y = \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1 - x^2}$.
b) Mivel az x változó nem szerepel ebben a másodrendű differenciálegyenletben, y'-t y függvényeként írva ($y' = p(y)$) a p-re mint függvényre, és az y-ra mint változóra elsőrendű differenciálegyenletet kapunk: $2yp'p = p^2$ (ugyanis $y'' = p'p$), azaz $p \not\equiv 0$ esetén $2yp' = p$. Ez is szétválasztható, és a megoldása $p = A\sqrt{|y|}$. Ez az $y > 0$ esetén az $y' = A\sqrt{y}$ differenciálegyenlethez, $y < 0$ esetén az $y' = A\sqrt{-y}$ differenciálegyenlethez vezet, és ezek mindketten szétválaszthatók. A megoldás (összevonva): $y = B(x + C)^2$, illetve a korábban félretett $p \equiv 0$, azaz $y \equiv C$ megoldás.)

Gyakorló feladatok

1. Oldjuk meg a következő (szétválasztható) differenciálegyenleteket, illetve kezdetiérték-problémákat!

a) $(1 + x^2)y' + x(1 + y^2) = 0$

b) $\sqrt{1 - x^2}y' + xy = 0$ az $y(\frac{1}{2}) = 0$, illetve az $y(\frac{3}{5}) = 1$ kezdeti feltétellel

2. Vezessük vissza szétválasztható differenciálegyenletre, és így oldjuk meg a $xy' = xe^{y/x} + y$, $y(1) = 0$ kezdetiérték-problémát!

3. Oldjuk meg a következő elsőrendű lineáris differenciálegyenleteket!

a) $y' + y \cos x = \sin x \cos x, \;\; y(0) = 1$

b) $xy' - (x + 1)y = x^2 - x^3$

4. Melyek egzaktak az alábbi differenciálegyenletek közül? Az egzaktakat oldjuk meg!

a) $(y\sin x - 1) + y'\cos x = 0$

b) $x(y^2+1) + y(1-x^2)y' = 0$

c) $2x + \cos y - (x\sin y)y' = 0, \quad y(1) = 0$

5. Oldjuk meg az $y'' + (y')^2 = 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$ hiányos másodrendű differenciálegyenletet!

Megoldások

1. a)

$$\frac{y'}{1+y^2} = -\frac{x}{1+x^2}$$

$$\int \frac{1}{1+y^2}\,dy = \int -\frac{x}{1+x^2}\,dx$$

$$\operatorname{arctg}(y) = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

$$y = \operatorname{tg}\left(-\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C\right) = \operatorname{tg}\frac{A}{\sqrt{1+x^2}},$$

ahol $A = e^C > 0$.

b)

$$\frac{y'}{y} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \text{ vagy } y \equiv 0$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \qquad ,$$

$$\ln|y| = \sqrt{1-x^2} + C$$

$$y = Ae^{\sqrt{1-x^2}}$$

ahol $A = \pm e^C$ tetszőleges nem 0 szám, vagy $A = 0$ a szinguláris megoldás miatt. Az $y(\frac{1}{2}) = 0$ kezdeti feltételt az $y \equiv 0$ megoldás, az $y(\frac{3}{5}) = 1$ kezdeti feltételt az $y = e^{-4/5}e^{\sqrt{1-x^2}}$ megoldás elégíti ki.

2. A differenciálegyenlet $y' = e^{y/x} + \frac{y}{x}$ alakra hozható. $z = y/x$, azaz $y = zx$ helyettesítésnél $y' = z'x + z$.

$$z'x + z = e^z + z$$

$$z'e^{-z} = \frac{1}{x}$$

$$\int e^{-z}\,dz = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$-e^{-z} = \ln|x| + C$$

$$z = -\ln(-\ln|x| - C))$$

Mivel az $x = 1$ környékén érvényes megoldást keressük, a $z = -\ln(-\ln x - C)$ lesz a megfelelő. Ebből $y = -x\ln(-\ln x - C)$. Az $y(1) = 0$ feltételt a $C = -1$ elégíti ki: $y = -x\ln(1 - \ln x)$.

3. a) A megfelelő homogén differenciálegyenlet, $y' + y\cos x = 0$, azaz $\dfrac{y'}{y} = -\cos x$ (ha $y \not\equiv 0$), és ebből $\ln|y| = C - \sin x$ azaz $y = Ae^{-\sin x}$, ahol $A \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Az inhomogén differenciálegyenlet megoldását az állandó variálásával $y = A(x)e^{-\sin x}$ alakban keressük. Behelyettesítve az eredeti egyenletbe: $A'(x)e^{-\sin x} - A(x)(\cos x)e^{-\sin x} + A(x)e^{-\sin x}\cos x = \sin x\cos x$, azaz $A'(x)e^{-\sin x} = \sin x \cos x$, amiből $A'(x) = e^{\sin x}\sin x\cos x$. Ebből $A(x) = \int e^{\sin x}\sin x\cos x\,dx = \int ue^u\,du$, ha $u = \sin x$ helyettesítést végzünk. Ez parciális integrálással: $\int ue^u\,du = ue^u - \int e^u\,du = (u-1)e^u + c = (-1+\sin x)e^{\sin x} + c$, és $y = A(x)e^{-\sin x} = -1 + \sin x + ce^{-\sin x}$. A kezdeti feltételt az $y = -1 + \sin x + 2e^{-\sin x}$ függvény elégíti ki.

b) A megfelelő homogén differenciálegyenlet $\dfrac{y'}{y} = 1 + \dfrac{1}{x}$ alakra hozható ($y \not\equiv 0$ esetén, és a megoldása $\ln|y| = x + \ln|x| + C$, azaz $\ln|y| = \ln e^x e^C|x|$, tehát $y = Axe^x$. Az inhomogén differenciálegyenlet megoldását az állandó variálásával $y = A(x)xe^x$ alakban keressük. Behelyettesítés után

$$A'(x)x^2e^x + A(x)xe^x + A(x)x^2e^x - (x+1)A(x)xe^x = x^2 - x^3, \text{ azaz}$$

$$A'(x) = e^{-x} - xe^{-x}, \text{ és így}$$

$$A(x) = \int e^{-x} - xe^{-x}\,dx = -e^{-x} + xe^{-x} - \int e^{-x}\,dx = xe^{-x} + c, \text{ tehát}$$

$$y = x^2 + cxe^x.$$

4. a) Nem egzakt: $P(x,y) = y\sin x - 1$, $Q(x,y) = \cos x$, $P_y = \sin x$, $Q_x = -\sin x$. Viszont elsőrendű lineáris. $y' + y\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}$ alakban az y együtthatójának primitív függvénye $-\ln(\cos x)$, és így $e^{-\ln(\cos x)} = \frac{1}{\cos x}$-szel beszorozva az $y'\frac{1}{\cos x} + y\frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$ differenciálegyenletet kapjuk, amelyben a bal oldal az $y\frac{1}{\cos x}$ deriváltja, tehát $\frac{y}{\cos x} = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C$, és így $y = \sin x + C\cos x$.

b) Nem egzakt: $P_y = 2xy$, $Q_x = -2xy$.

c) Egzakt: $P_y = Q_x = -\sin y$. Az $u_x = 2x + \cos y$, $u_y = -x\sin y$ feltételeket kielégítő egyik u függvény $x^2 + x\cos y$, tehát a differenciálegyenlet általános megoldása

$$x^2 + x\cos y = C.$$

Az $y(1) = 0$ feltétel $1 + 1 = C$ esetén teljesül ($x = 1$, $y = 0$-t helyettesítünk az egyenletbe), tehát $x^2 + x\cos y = 2$, azaz

$$y = \arccos\frac{2 - x^2}{x}.$$

5. Kétféleképpen is megoldhatjuk. A $z(x) = y'(x)$ helyettesítéssel a $z' + z^2 = 1$ szétválasztható differenciálegyenletet kapjuk: $\frac{z'}{1-z^2} = 1$, amiből az $\frac{1}{1-z^2} = \frac{1/2}{1-z} + \frac{1/2}{1+z}$ felbontás segítségével az $\ln\frac{1+z}{1-z} = 2x + c$, ahol $y'(0) = 0$ miatt $c = 0$, tehát $\ln\frac{1+z}{1-z} = 2x$, és így $y' = z = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$, így $y = \ln(\operatorname{ch} x) + C$. Felhasználva az $y(0) = 0$ feltételt is, azt kapjuk, hogy $y = \ln(\operatorname{ch} x)$.

Ha viszont a $p(y) = y'$ helyettesítést használjuk (minthogy x sem szerepel a differenciálegyenletben), akkor a $\frac{p'p}{1-p^2} = 1$ összefüggésből $-\frac{1}{2}\ln|1-p^2| = y + c$ adódik. Mivel $y = 0$-ra $x = 0$, és így $y' = 0$ is igaz a kezdeti feltételek szerint, $p(0) = 0$, tehát $c = 0$, és p-re azt kapjuk, hogy $1 - p^2 = e^{-2y}$, azaz $y' = \pm\sqrt{1-e^{-2y}}$. Ezt szétválaszthatóként megoldva $\pm x + C = \int \frac{1}{\sqrt{1-e^{-2y}}}\,dy = \int \frac{e^y}{\sqrt{e^{2y}-1}}\,dy = \operatorname{arch}(e^y)$. A kezdeti feltételek miatt $C = 0$, és $y = \ln(\operatorname{ch} x)$.