

## Órai feladatok

- Egyváltozós multiplikátorral tegyük egzakttá és oldjuk meg az alábbi differenciálegyenleteket!
  - $(1 - xy) + (xy - x^2)y' = 0$
  - $e^{-y} + (xe^{-y} - 2ye^{-2y})y' = 0$
- Oldjuk meg a következő állandó együtthatós, homogén, lineáris differenciálegyenleteket!
  - $y'' - 5y' + 6y = 0$
  - $y'' - 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$
  - $y'' + 4y = 0$
- Írjuk fel az általános megoldását annak a homogén, lineáris differenciálegyenletnek, amelynek karakterisztikus egyenlete  $m^2(m - 1)^3(m^2 + 1)$ . Melyik ez a differenciálegyenlet?
- Milyen próbafüggvényt használnánk ahhoz az állandó együtthatós, inhomogén, lineáris differenciálegyenlethez, amelynek jobb oldalán a következő függvény áll? A karakterisztikus egyenlet milyen gyökei esetén kell még alkalmas  $x$ -hatvánnyal megszorozni a próbafüggvényt?
  - $5x^2 - 1$
  - $x \cos 3x$
  - $e^{2x} \sin x$
- Oldjuk meg a következő inhomogén, lineáris differenciálegyenleteket!
  - $y'' + 2y' + y = \sin x$
  - $y'' + 2y' + y = xe^{-x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$

## Gyakorló feladatok

- Egyváltozós multiplikátorral tegyük egzakttá és oldjuk meg az alábbi differenciálegyenleteket!
  - $(y \sin x - 1) + y' \cos x = 0$
  - $x(y^2 + 1) + y(1 - x^2)y' = 0$
- Oldjuk meg az  $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$  állandó együtthatós, homogén, lineáris differenciálegyenletet!
- Oldjuk meg a következő inhomogén, lineáris differenciálegyenleteket!
  - $y'' + y = -4 \cos x, \quad y(\pi) = 0, \quad y'(\pi) = \pi$
  - $y''' - y'' - 2y' = x^3 + e^x$

## Az órai feladatok megoldása

- a)  $P_y = -x, \quad Q_x = y - 2x$ , tehát a differenciálegyenlet nem egzakt. Viszont  $\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{x - y}{xy - x^2} = -\frac{1}{x}$  csak  $x$ -től függ, így van  $x$ -től függő  $M(x)$  multiplikátor, amelyre  $\ln M(x) = \int -\frac{1}{x} dx = \ln \frac{1}{x} + c$ , tehát  $M(x) = x$  jó multiplikátor. Ezzel felszorozva az egyenletet az

$$\left(\frac{1}{x} - y\right) + (y - x)y' = 0$$

egzakt differenciálegyenlethez jutunk. A megoldáshoz olyan  $u(x, y)$  függvényre van szükségünk, amelyre  $u_x = \frac{1}{x} - y$  és  $u_y = y - x$ , tehát  $u(x, y) = \ln x - xy + \frac{1}{2}y^2$  megfelel. Így a megoldás az  $\ln x - xy + \frac{1}{2}y^2 = C$  implicit egyenlet által meghatározott  $y$  függvény.

b)  $P_y = -e^{-y}$ ,  $Q_x = e^{-y}$ , tehát a differenciálegyenlet nem egzakt, és  $\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{-2e^{-y}}{xe^{-y} - 2ye^{-2y}} = \frac{-2}{x - 2ye^{-y}}$  nem csak  $x$ -től függ, tehát nincs  $M(x)$  multiplikátor. Viszont  $\frac{Q_x - P_y}{P} = \frac{2e^{-y}}{e^{-y}} = 2$  csak (legfőljebb)  $y$ -től függ, tehát  $N(y)$  multiplikátor létezik:  $\ln N(y) = \int 2 dy = 2y + c$  miatt  $N(y) = e^{2y}$  megfelel. A differenciálegyenletet ezzel végigszorozva az

$$e^y + (xe^y - 2y)y' = 0$$

egzakt differenciálegyenletet kapjuk. Ennek megoldását az  $u(x, y) = xe^y - y^2$  függvényből az

$$xe^y - y^2 = C$$

implicit egyenlet adja.

**2. a)** A karakterisztikus egyenlet  $m^2 - 5m + 6 = 0$ , a gyökei 2 és 3 (mindegyik egyszeres, mert  $m^2 - 5m + 6 = (m - 2)(m - 3)$ ), az általános megoldás  $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$ .

b) A karakterisztikus egyenlet  $m^2 - 6m + 9 = 0$ , azaz  $(m - 3)^2 = 0$ , ennek egyetlen gyöke a 3, ami kétszeres gyök. Az általános megoldás  $y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$ . Erre  $y' = 3c_1 e^{3x} + c_2(1 + 3x)e^{3x}$ . A kezdeti feltételekből  $c_1 = 1$  és  $3c_1 + c_2 = 2$ , tehát  $c_2 = -1$ , és  $y = e^{3x} - x e^{3x}$ .

c) A karakterisztikus egyenlet  $m^2 + 4 = 0$ , a gyökei  $\pm 2i$  (mindkettő egyszeres), a megoldása  $y = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$ .

**3.** A karakterisztikus egyenlet gyökei 0 (2-szeres), 1 (3-szoros) és  $\pm i$  (mindkettő egyszeres). Ebből az általános megoldás  $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + c_4 x e^x + c_5 x^2 e^x + c_6 \cos x + c_7 \sin x$ .

**4. a)** A próbafüggvény  $Ax^2 + Bx + C$ , és ezt akkor kell  $x^s$ -nel megszorozni, ha 0 a karakterisztikus egyenletnek  $s$ -szeres gyöke.

b) A próbafüggvény  $(Ax + B) \cos 3x + (Cx + D) \sin 3x$ , és akkor kell  $x^s$ -nel megszorozni, ha  $3i$  a karakterisztikus egyenletnek  $s$ -szeres gyöke.

c) A próbafüggvény  $Ae^{2x} \cos x + Be^{2x} \sin x$ , és akkor kell  $x^s$ -nel megszorozni, ha  $2 + i$  a karakterisztikus egyenletnek  $s$ -szeres gyöke.

**5. a)** A karakterisztikus egyenlet  $m^2 + 2m + 1 = 0$ , azaz  $(m + 1)^2 = 0$ . Ennek a  $-1$  kétszeres gyöke, tehát a homogén differenciálegyenletnek a  $c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$  az általános megoldása. Az inhomogénhez próbafüggvény  $y_p = A \cos x + B \sin x$  (nem kell  $x$ -szel beszorozni, mert  $i$  nem gyöke a karakterisztikus egyenletnek). Ezt behelyettesítve az inhomogén differenciálegyenletbe azt kapjuk, hogy  $2B \cos x - 2A \sin x = \sin x$ . Tehát  $B = 0$  és  $A = -\frac{1}{2}$ , az inhomogén differenciálegyenlet megoldása pedig  $y = -\frac{1}{2} \cos x + c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$ .

b) A homogén ugyanaz, az inhomogén megoldásához a próbafüggvény viszont  $(Ax + B)e^{-x} \cdot x^2 = (Ax^3 + Bx^2)e^{-x}$  ( $x^2$ -tel azért kellett beszorozni, mert a  $-1$  a karakterisztikus egyenletnek kétszeres gyöke). Az inhomogén differenciálegyenletbe behelyettesítve ezt a próbafüggvényt azt kapjuk, hogy  $(6A + 2B)xe^{-x} + 2Be^{-x} = xe^{-x}$ , amiből  $B = 0$  és  $A = \frac{1}{6}$ . Így a differenciálegyenlet általános megoldása  $y = \frac{1}{6}x^3 e^{-x} + c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$ . A kezdetiérték-probléma megoldása:  $y = \frac{1}{6}x^3 e^{-x} + e^{-x}$ .

## A házi feladatok megoldása

1. a)  $P(x, y) = y \sin x - 1$ ,  $Q(x, y) = \cos x$ ,  $P_y = \sin x$ ,  $Q_x = -\sin x$ , tehát az egyenlet nem egzakt.  $\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{2 \sin x}{\cos x}$  csak  $x$ -től függ, tehát van  $M(x)$  multiplikátor. Erre

$$\ln M(x) = \int \frac{2 \sin x}{\cos x} dx = -2 \ln(\cos x) + c = \ln \frac{1}{\cos^2 x} + c,$$

tehát  $M(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$  megfelelő. Ezzel végigszorozva az egyenletet:

$$y \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} + y' \frac{1}{\cos x} = 0,$$

ami már valóban egzakt. Az új egyenlethez tartozó  $u(x, y)$  függvényre  $u_x = y \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}$ , és  $u_y = \frac{1}{\cos x}$ , aminek az egyik megoldása  $u = \frac{y}{\cos x} - \operatorname{tg} x$ , tehát a differenciálegyenlet  $y$  megoldása az  $\frac{y}{\cos x} - \operatorname{tg} x = C$ , azaz  $y = \sin x + C \cos x$ .

b) A differenciálegyenlet nem egzakt,  $\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{4xy}{y(1-x^2)} = \frac{4x}{1-x^2}$  csak  $x$ -től függő, és így ad egy  $M(x)$  multiplikátort, amelyre  $\ln M(x) = \int \frac{4x}{1-x^2} dx = -2 \ln(1-x^2) + c = \ln \frac{1}{(1-x^2)^2} + c$ , vagyis ( $c = 0$ -val)  $M(x) = \frac{1}{(1-x^2)^2}$ . Ezzel végigszorozva a differenciálegyenletet:

$$(y^2 + 1) \frac{x}{(1-x^2)^2} + \frac{y}{1-x^2} y' = 0.$$

Ennek az egzakt differenciálegyenletnek a megoldását annak az  $u(x, y)$  függvénynek a segítségével tudjuk kifejezni, amelyre

$$u_x = (y^2 + 1) \frac{x}{(1-x^2)^2} \text{ és } u_y = \frac{y}{1-x^2}.$$

Ennek az egyik megoldása  $u = \frac{1+y^2}{1-x^2}$ , így a differenciálegyenlet  $y$  megoldására

$$\frac{1+y^2}{1-x^2} = C, \text{ azaz } y = \pm \sqrt{C(1-x^2) - 1}.$$

2. A karakterisztikus egyenlet  $m^4 + 2m^2 + 1 = 0$ , azaz  $(m^2 + 1)^2 = (m - i)^2(m + i)^2 = 0$ , és ennek  $i$  (és  $-i$  is) kétszeres gyöke. Tehát a megoldás  $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 x \cos x + c_4 x \sin x$ .

3. a) A karakterisztikus egyenlet  $m^2 + 1 = 0$ , gyökei  $\pm i$  (egyszeresek), a homogén differenciálegyenlet megoldása  $c_1 \cos x + c_2 \sin x$ . Az inhomogénhez a próbafüggvény  $(A \cos x + B \sin x) \cdot x = Ax \cos x + Bx \sin x$ . Behelyettesítés után azt kapjuk, hogy  $-2A \sin x + 2B \cos x = -4 \cos x$ , amiből  $A = 0$  és  $B = -2$ . Tehát az általános

megoldás  $y = -2x \sin x + c_1 \cos x + c_2 \sin x$ , és a kezdetiérték-probléma megoldása  $y = -2x \sin x + \pi \sin x = (\pi - 2x) \sin x$ .

b) A karakterisztikus egyenlet  $m^3 - m^2 - 2m = 0$ , azaz  $m(m - 2)(m + 1) = 0$ . A gyökei  $0, 2, -1$ , egyszeresek, a homogén általános megoldása  $c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-x}$ . Az inhomogént két részre bontjuk. Az  $x^3$  jobb oldalhoz a próbafüggvény  $(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)x = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx$ . Behelyettesítés után ebből az  $y_1 = -\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{8}x^2 + \frac{15}{8}x$ . Az  $e^x$  jobb oldalhoz a próbafüggvény  $Ae^x$ , és behelyettesítés után az  $y_1 = -\frac{1}{2}e^x$  megoldást kapjuk. Tehát az eredeti differenciálegyenlet általános megoldása  $y = -\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{8}x^2 + \frac{15}{8}x - \frac{1}{2}e^x + c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-x}$ .