

- Ellenőrizzük, hogy a megadott függvények alaprendszerét alkotják a megadott lineáris differenciálegyenlethez tartozó homogén differenciálegyenletnek, és ezután oldjuk meg az inhomogént az állandók variálásának módszerével!
 - $xy'' + (x-1)y' - y = x^2$, $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = x - 1$
 - $xy'' - \frac{6}{x}y = 6x^2$, $y_1 = \frac{1}{x^2}$, $y_2 = x^3$
 - $xy''' - y'' - xy' + y = x^2$, $y_1 = x$, $y_2 = \operatorname{ch} x$, $y_3 = \operatorname{sh} x$
- Oldjuk meg az alábbi Euler-féle differenciálegyenleteket!
 - $x^2y'' - 3xy' - 21y = -8x^5$
 - $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^4 - x^2$, $y(1) = \frac{1}{2}$, $y'(1) = 0$
 - $x^2y'' - 3xy' + y = 0$
 - $xy''' + 2y'' = \frac{1}{x}$
- Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszereket!
 - $\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_1 - 5x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 \end{cases}$, $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 2$.
 - $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax}$, ahol $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$
 - $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax}$, ahol $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

Megoldások

1. a) Az y_1 -et behelyettesítve ($y_1' = -e^{-x}$, $y_1'' = e^{-x}$): $xe^{-x} + (x-1)(-e^{-x}) - e^{-x} = 0$, és y_2 -t behelyettesítve ($y_2' = 1$, $y_2'' = 0$): $x \cdot 0 + (x-1) \cdot 1 - (x-1) = 0$, tehát y_1 és y_2 is megoldása a megfelelő homogén differenciálegyenletnek, és függetlenek is, ugyanis a Wronski-determináns $\begin{vmatrix} e^{-x} & (x-1) \\ -e^{-x} & 1 \end{vmatrix} = xe^{-x}$ nem azonosan 0. Így $\{y_1, y_2\}$ alaprendszer a másodrendű differenciálegyenletnek, és a homogén differenciálegyenlet általános megoldása $c_1y_1 + c_2y_2$.

Az inhomogén egyenlet megoldását $y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$ alakban keressük, ahol $c_i'(x) = W_i/W$ ($i = 1, 2$), és $W_1 = \begin{vmatrix} 0 & (x-1) \\ x & 1 \end{vmatrix} = -x^2 + x$, továbbá $W_2 = \begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & x \end{vmatrix} = xe^{-x}$ (a Cramer-szabály szerinti $\begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix}$ oszlop a W_1 -ben és W_2 -ben a differenciálegyenlet 1 főegyütthatós formájának konstans tagját tartalmazza). Ebből $c_1(x) = \int (-x+1)e^x dx = (-x+1)e^x - \int -e^x dx = (-x+2)e^x + C_1$, és $c_2(x) = \int 1 dx = x + C_2$, tehát $y = (-xe^x + C_1)e^{-x} + (x + C_2)(x-1) = x^2 - 2x + 2 + C_1e^{-x} + C_2(x-1)$.

b) Az alaprendszer ellenőrzése után: $W = \begin{vmatrix} 1/x^2 & x^3 \\ -2/x^3 & 3x^2 \end{vmatrix} = 5$, $W_1 = \begin{vmatrix} 0 & x^3 \\ 6x & 3x^2 \end{vmatrix} = -6x^4$, $W_2 = \begin{vmatrix} 1/x^2 & 0 \\ -2/x^3 & 6x \end{vmatrix} = 6/x$, $c_1(x) = -\frac{6}{25}x^5 + C_1$, $c_2(x) = \frac{6}{5} \ln x + C_2$, $y = -\frac{6}{25}x^3 + \frac{6}{5}x^3 \ln x + C_1 \frac{1}{x^2} + C_2 x^3$.

c) Behelyettesítéssel ellenőrizzük, hogy x , $\operatorname{ch} x$ és $\operatorname{sh} x$ megoldása a homogén differenciálegyenletnek, és mivel a differenciálegyenlet harmadrendű, ezek alaprendszert is alkotnak, ha a Wronski-determinánsuk nem azonosan 0. $W = -x$ (felhasználva, hogy $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$), $W_1 = x$,

$W_2 = -x^2 \operatorname{ch} x + x \operatorname{sh} x$, $W_3 = x^2 \operatorname{sh} x - x \operatorname{ch} x$, $c_1(x) = -x + C_1$, $c_2(x) = x \operatorname{sh} x - 2 \operatorname{ch} x + C_2$,
 $c_3(x) = -x \operatorname{ch} x + 2 \operatorname{sh} x + C_3$, $y = -2 - x^2 + C_1 x + C_2 \operatorname{ch} x + C_3 \operatorname{sh} x$.

2. a) 1. megoldás: Legyen $x = e^t$. Ekkor $xy' = \dot{y}$, és $xy'' = \ddot{y} - \dot{y}$, az egyenlet pedig az $\ddot{y} - 4\dot{y} - 21y = -8e^{5t}$ állandó együtthatós, inhomogén differenciálegyenletbe megy. A karakterisztikus egyenlete $m^2 - 4m - 21 = (m - 7)(m + 3) = 0$, aminek 7 és -3 a két gyöke, így a homogén egyenlet megoldása $y = c_1 e^{7t} + c_2 e^{-3t}$. Az inhomogénhez próbafüggvény az $y_p = A e^{5t}$, és ezt behelyettesítve az $y_p = \frac{1}{2} e^{5t}$ megoldást kapjuk, amiből $y = \frac{1}{2} e^{5t} + c_1 e^{7t} + c_2 e^{-3t} = \frac{1}{2} x^5 + c_1 x^7 + c_2 x^{-3}$.

2. megoldás: A homogén $x^2 y'' - 3xy' - 21y = 0$ egyenlet megoldásait keressük x^m alakban! Ha behelyettesítjük, azt kapjuk, hogy $m(m - 1)x^m - 3mx^m - 21x^m = 0$, azaz $m^2 - 4m - 21 = 0$, és ennek $m = 7, -3$ a megoldásai. $y_1 = x^7$ és $y_2 = x^{-3}$ alaprendszer ad. Ebből az inhomogén differenciálegyenletet állandók variálásával kapjuk meg. $y = c_1(x)x^7 + c_2(x)x^{-3}$. $W = -10x^3$, $W_1 = 8$, $W_2 = -8x^{10}$, $c_1(x) = \frac{2}{5}x^{-2} + C_1$, $c_2(x) = \frac{1}{10}x^8 + C_2$,
 $y = \frac{1}{2}x^5 + C_1 x^7 + C_2 x^{-3}$.

c) Keressük a megoldást $u = x^m$ alakban. Ekkor $m(m - 1)x^m - 3mx^m + x^m = 0$, tehát $m^2 - 4m + 1 = 0$. Ennek a gyökei $2 \pm \sqrt{3}$, tehát a megoldás $y = c_1 e^{2+\sqrt{3}} + c_2 e^{2-\sqrt{3}} = c_1 x^{2+\sqrt{3}} + c_2 x^{2-\sqrt{3}}$. (Mivel a másodrendű differenciálegyenlethez két lineárisan független megoldást találtunk, ez a lineáris kombináció valóban az összes megoldást adja meg.)

d) Ez is Euler-féle: $x^3 y''' + 2x^2 y'' = x$ alakra hozható. A homogén megoldásait $y = x^m$ alakban keresve azt kapjuk, hogy $m(m - 1)(m - 2) + 2m(m - 1) = 0$, azaz $m^3 - m = m(m - 1)(m + 1) = 0$, tehát a homogén alaprendszere $y_1 = e^{-t} = \frac{1}{x}$, $y_2 = 1$, és $y_3 = e^t = x$. Állandók variálásával megkapjuk az inhomogén egyenlet megoldásait is: $y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}\frac{1}{x} + C_1 \frac{1}{x} + C_2 + C_3 x$. De megoldhatjuk úgy is, hogy először a $z = y''$ függvényt határozzuk meg az $xz' + 2z = \frac{1}{x}$ egyenletből, aztán az eredményt kétszer integráljuk.

3. a) Vektorosan írva az egyenletet: $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, ahol $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$. A sajátértékei az

$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & -5 \\ 1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1)$ karakterisztikus polinom gyökei:

$\lambda_1 = 3$ és $\lambda_2 = -1$. Ezekhez keresünk egy-egy sajátvektort: $\lambda_1 = 3$ -hoz a $\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0}$

egyenletrendszert kell megoldani, és ennek a megoldása $s \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ ($s \in \mathbb{R}$), $\lambda_2 = -1$ -hez a

$\begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0}$ egyenletet, amiből $\mathbf{v} = s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Tehát $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ egy-egy sajátvektor a két sajátértékhez.

Ezekkel kifejezhető a differenciálegyenlet-rendszer általános megoldása: $\mathbf{x} = c_1 \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t$. A kezdeti feltételekből $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$,

azaz $1 = 5c_1 + c_2$ és $2 = c_1 + c_2$, amiből $c_1 = -\frac{1}{4}$, és $c_2 = \frac{9}{4}$.

Másképpen: visszavezethetjük a differenciálegyenlet-rendszert egy magasabb rendű differenciálegyenletre. A második egyenletből $x_1 = \dot{x}_2 + 2x_2$, és ezt behelyettesítve az elsőbe: $\ddot{x}_2 + 2\dot{x}_2 = 4\dot{x}_2 + 8x_2 - 5x_2$, azaz $\ddot{x}_2 - 2\dot{x}_2 - 3x_2 = 0$. Ezt a szokásos módon megoldva: $x_2 = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t}$, és az $x_1 = \dot{x}_2 + 2x_2$ összefüggésből $x_1 = 5c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t}$. A kezdeti feltételekből $c_1 = -\frac{1}{4}$, és $c_2 = \frac{9}{4}$.

b) Az előbbi módon kiszámítjuk a sajátértékeket, de ezek itt nem valósak: $\lambda = -1 \pm i$, és a

hozzájuk tartozó sajátvektorok $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$. A $\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} e^{(-1+i)t}$ valós és képzetes része két független valós megoldást ad: $\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} e^{(-1+i)t} = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) e^{-t} (\cos t + i \sin t) = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} \cos t - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t} \sin t \right) + i \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} \sin t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t} \cos t \right)$, tehát a differenciálegyenlet-rendszer általános megoldása $\mathbf{x} = c_1 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} \cos t - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t} \sin t \right) + c_2 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} \sin t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t} \cos t \right) = c_1 \begin{bmatrix} -e^{-t} \sin t \\ e^{-t} \cos t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} e^{-t} \cos t \\ e^{-t} \sin t \end{bmatrix}$.

c) Az A mátrixnak csak egy valós sajátértéke van: $\lambda = 2$, és ehhez csak a $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektor skalárszorosai a sajátvektorok. Ilyenkor a $\mathbf{v} \cdot e^{\lambda t}$ mellett a $\mathbf{w} e^{\lambda t} + \mathbf{v} t e^{\lambda t}$ is megoldás, ahol $(A - \lambda I)\mathbf{w} = \mathbf{v}$. Az utóbbi egyenletrendszert megoldva azt kapjuk, hogy $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -1 + u \\ u \end{bmatrix}$ valamilyen $u \in \mathbb{R}$ -re, speciálisan $u = 0$ -ra $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Tehát a differenciálegyenlet-rendszer általános megoldása $c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} t e^{2t} \right)$.

Természetesen ezt és a b) feladatot is vissza lehet vezetni másodrendű differenciálegyenlet megoldására.