1. *Számítsuk ki az* $\mathbf{r}(u,v) = (u+v, u+3, 1-2v)$, $u \in [0,3]$, $v \in [1,3]$ *paraméterű felület felszínét, és az u értékhez tartozó paramétervonal hosszát (vagyis e görbe ívhosszát).*

Megoldás: $\mathbf{r}_u = (1,1,0), \mathbf{r}_v = (1,0,-2)$, $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = |(-2,2,-1)| = 3$, $\int_1^3 \int_0^3 3\,du\,dv = 18$.
$u = 2$-re $\mathbf{r} = (2+v, 5, 1-2v)$, $|\mathbf{r}_v| = |(1,0,-2)| = \sqrt{5}$ és az ívhossz $\int_0^3 \sqrt{5}\,dv = 2\sqrt{5}$.

2. *Adjuk meg azt a* $t(s)$ *függvényt, melynek behelyettesítésével az* $\mathbf{r}(t) = (e^t \cos 2t,\ e^t \sin 2t, 2e^t)$, $t \in [0, \ln 3]$ *görbe ívhosszparaméteressé válik a* $t_0 = 0$ *paraméterű pontból indulva.*

Megoldás: $\dot{\mathbf{r}}(t) = (e^t \cos 2t - 2e^t \sin 2t,\ e^t \sin 2t + 2e^t \cos 2t,\ 2e^t)$, $|\dot{\mathbf{r}}| = 3e^t$, $s = \int_0^t 3e^\tau\,d\tau = 3e^t - 3$, amiből $t(s) = \ln\left(\dfrac{s}{3} + 1\right)$.

3. *Határozzuk meg az* $\mathbf{r}(t) = (\cos^2 t,\ \sin t,\ \cos t \sin t)$ *görbe* $t = \frac{\pi}{2}$ *paraméterű pontjához tartozó simulósík egyenletét és a görbe e pontbeli görbületét.*

Megoldás: $\dot{\mathbf{r}}(t) = (-2\cos t \sin t,\ \cos t,\ \cos^2 t - \sin^2 t)$ (egyszerűsítve: $(-\sin 2t,\ \cos t,\ \cos 2t)$), $\ddot{\mathbf{r}}(t) = (2\sin^2 t - 2\cos^2 t,\ -\sin t,\ -4\cos t \sin t)$, $\mathbf{r}(\frac{\pi}{2}) = (0,1,0)$, $\dot{\mathbf{r}}(\frac{\pi}{2}) = (0,0,-1)$, $\ddot{\mathbf{r}}(\frac{\pi}{2}) = (2,-1,0)$. Ebből $\dot{\mathbf{r}}(\frac{\pi}{2}) \times \ddot{\mathbf{r}}(\frac{\pi}{2}) = (-1,-2,0) \,||\, (1,2,0)$, tehát a simulósík egyik normálvektora $(1,2,0)$, egy pontja $(0,1,0)$, és az egyenlete $1(x-0) + 2(y-1) = 0$, azaz $x + 2y = 2$. A görbület $\dfrac{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3} = \sqrt{5}$.

4. *Határozzuk meg az* $(x,y,z) \mapsto \left(2\sqrt{y}, \dfrac{x}{\sqrt{y}} + z,\ y\right)$ *függvény integrálját egy olyan görbén, amely a* $(0,1,2)$ *pontból a* $(2,4,1)$ *pontba vezet, és amelynek minden pontjára* $y > 0$.

Megoldás: $\mathbf{F}(x,y,z) = (2\sqrt{y},\ \frac{x}{\sqrt{y}} + z,\ y)$. Könnyű ellenőrizni, hogy $\mathbf{rot}\,\mathbf{F} = \mathbf{0}$, így $\mathbf{F}$-nek van potenciálfüggvénye, azaz olyan $u(x,y,z)$, amelyre $u_x = 2\sqrt{y}$, $u_y = \frac{x}{\sqrt{y}} + z$ és $u_z = y$. Az első egyenletből $u = 2x\sqrt{y} + g(y,z)$. Erre $u_y = \frac{x}{\sqrt{y}} + g_y(y,z) = \frac{x}{\sqrt{y}} + z$, így $g(y,z) = yz + h(z)$, és $u = 2x\sqrt{y} + yz + h(z)$. A harmadik egyenletből $u_z = y + h'(z) = y$, így $h(z)$ konstans, és u-nak megfelel $u(x,y,z) = 2x\sqrt{y} + yz$. Tehát $\int_{\mathcal{G}} \mathbf{F}(\mathbf{r})\,\mathbf{dr} = \left[2x\sqrt{y} + yz\right]_{(0,1,2)}^{(2,4,1)} = 10$.

5. *Az a és b paraméterek milyen értékére lesz forrásmentes, illetve örvénymentes az* $(x,y,z) \mapsto (x^2, axy - byz, z^2)$ *függvény?*

Megoldás: $\mathbf{rot}\,\mathbf{F} = (by, 0, ay)$, tehát $a = b = 0$ esetén örvénymentes a függvény, és $\operatorname{div} \mathbf{F} = 2x + ax - by + 2z = (2+a)x + (2-b)z$, tehát $a = -2$ és $b = 2$ esetén forrásmentes.

6. *Számítsuk ki az* $\mathbf{F}(x,y,z) = (y-x,\ z-x,\ x+z)$ *függvény rotációjának a felületmenti integrálját az* $\mathbf{r}(r,\vartheta) = (r\cos\vartheta,\ r\sin\vartheta,\ 9 - r^r)$, $r \in [0,3]$, $\theta \in [0, 2\pi]$ *paraboloiddarabon fölfelé mutató normálvektor mellett.*

Megoldás: 1. megoldás: $\mathbf{rotF} = (-1,-2,-2)$, $\mathbf{r}_r = (\cos\vartheta,\ \sin\vartheta,\ -2r)$, $\mathbf{r}_\vartheta = (-r\sin\vartheta,\ r\cos\vartheta,\ 0)$, $\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\vartheta = (2r^2\cos\vartheta,\ 2r^2\sin\vartheta,\ r)$ fölfelé mutat,
$\int_0^3 \int_0^{2\pi} -2r^2\cos\vartheta - 4r^2\sin\vartheta - 2r\,d\vartheta\,dr = -18\pi$.

2. megoldás: Stokes-tétellel. A felületdarab határa az $r = 3$-hoz tartozó szintvonal: $\mathbf{r}(\vartheta) = (3\cos\vartheta, 3\sin\vartheta, 0)$. $\mathbf{F}(\mathbf{r}(\vartheta)) = (3\sin\vartheta,\ -3\cos\vartheta,\ 3\cos\vartheta)$ $(0 \le \vartheta \le 2\pi)$, $\dot{\mathbf{r}}(\vartheta) = (-3\sin\vartheta,\ 3\cos\vartheta,\ 0)$, és az integrál $\int_0^{2\pi} -9\sin^2\vartheta - 9\cos^2\vartheta\,d\vartheta = -18\pi$.

7. *Számítsuk ki az* $\mathbf{F}(x,y,z)=(xy,0,-z)$ *függvény fluxusát a* $z=\sqrt{x^2+y^2}$ *egyenletű kúpnak a* $z=1$ *és* $z=2$ *síkok közti darabján kifelé (egyúttal lefelé) mutató irányítással. (Hogyan érdemes paraméterezni a felületet?)*

Megoldás: A kúp paraméterezése $\mathbf{r}(x,y)=(x,\ y,\ \sqrt{x^2+y^2})$.
Erre $\mathbf{r}_x\times\mathbf{r}_y=\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ 1\right)$, de ez nem lefelé mutató, így az integrálhoz az $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ -1\right)$ normálvektort használjuk. $\mathbf{F}(\mathbf{r}(x,y))=(xy,\ 0,\ -\sqrt{x^2+y^2})$, és az integrál $\displaystyle\iint\limits_{1\le x^2+y^2\le 4}\frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy=\int\limits_1^2\int\limits_0^{2\pi}\frac{r^3\cos^2\vartheta\sin\vartheta}{r}+r)r\,d\vartheta\,dr=\frac{14}{3}\pi.$

8. *Számítsuk ki az* $\mathbf{F}(x,y,z)=(x+y,\,y-z,\,x-z)$ *függvény fluxusát az* $x=\pm1,\ \ y=\pm1,$ $z=\pm1$ *síkok által határolt kocka kifelé irányított felületén.*

Megoldás: Gauss–Osztrogradszkij-tétellel. $\operatorname{div}\mathbf{F}=1$, így az integrál értéke megegyezik a kocka térfogatával, ami 8.