Órai feladatok

1. Tekintsük az origó körüli egységkör x tengely fölötti félkörívének következő paraméterezéseit.

I. $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \le t \le \pi$;
II. $\mathbf{r}(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$, $-1 \le t \le 1$;
III. $\mathbf{r}(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$;
IV. $\mathbf{r}(t) = (\cos t, |\sin t|)$, $0 \le t \le 2\pi$.

Melyik paraméterezések írnak le egyenletes (pályamenti) sebességű mozgást? Az egyenletesek közül melyik mozog lassabban, illetve gyorsabban? A nem egyenletesek hol mozognak lassabban, illetve gyorsabban?

(I. és III. egyenletes, III. kétszer olyan gyors, mint az I. IV. a $(0, \pi)$ és $(\pi, 2\pi)$ szakaszon egyenletes, oda-vissza megy a köríven. II. az út elején és végén gyors, a közepén a leglassabb.)

2. Milyen görbét írnak le a következő függvények?

a) $\mathbf{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t, t)$;
b) $\mathbf{r}(t) = (t^2, 2+t^2, 1-4t^2)$.

(Csavarvonal és félegyenes.)

3. Mi a limesze az $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, \dfrac{1}{(t-1)^2})$ függvénynek $t = 1$-ben? Mihez közelít, ha t ∞-be, illetve $-\infty$-be tart? Írjuk le a görbe menetét!

($\lim\limits_{t\to 1} = (1, 1, \infty)$, azaz itt a görbe az $x = 1$, $y = 1$ egyenes fölső félegyeneséhez tart. A $\pm\infty$-ben a görbe a $(t, t^2, 0)$ parabolához közelít. Tehát a görbének két egymással nem összefüggő darabja van: egyik az $y = x^2$, $z = 0$ parabola $x \le 0$ ága felől érkezik, és $x = 1$ közelében az $x = 1$, $y = 1$ egyenest közelítve halad fölfelé, a másik innen jön visszafelé, és a parabola pozitív ágát közelítve simul az xy-síkhoz.)

4. (Térbeli kör leírása) Paraméterezzük az $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ és az $x + 2y = 0$ felületek metszetgörbéjét.

($\mathbf{r}(t) = (-\frac{4}{\sqrt{5}}\cos t, \frac{2}{\sqrt{5}}\cos t, 2\sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$.)

5. Számítsuk ki a 2. feladat paraméterezett görbéire a sebességvektorokat és a görbementi sebességet.

(a) $\dot{\mathbf{r}}(t) = (-2\sin t, 2\cos t, 1)$, $|\dot{\mathbf{r}}(t)| = \sqrt{5}$; b) $\dot{\mathbf{r}}(t) = 2t(1, 1, -4)$, $|\dot{\mathbf{r}}(t)| = 6\sqrt{2}|t|$.)

5. Határozzuk meg az $\mathbf{r}(t) = (t^2, \dfrac{t+1}{t}, \dfrac{t}{t+1})$ görbe érintőegyenesének egyenletrendszerét a $t_0 = 1$ paraméterű pontban.

($x = 1 + 2t$, $y = 2 - t$, $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}t$.)

6. Milyen görbét ír le az $\mathbf{r}(t) = (t^3, \sqrt{t^6})$ paraméterezés? Differenciálható-e az $\mathbf{r}(t)$ függvény a $t = 0$ pontban? Van-e ott a görbének érintője?

(Az $y = |x|$ görbét írja le. A függvény mindenütt differenciálható, 0-ban a deriváltvektora $\mathbf{0}$, de itt nincs érintője a görbének.)

7. Számítsuk ki az $\mathbf{r}(t) = (t, 2\sqrt{t^3}, t\sqrt{8})$ görbe hosszát a $t_1 = 0$ és $t_2 = 3$ pontok között.

($\dot{\mathbf{r}}(t) = (1, 3\sqrt{t}, \sqrt{8})$, $|\dot{\mathbf{r}}(t)| = 3\sqrt{t+1}$, az ívhossz $\int_0^3 3\sqrt{t+1}\,dt = \left[2(t+1)^{3/2}\right]_0^3 = 14.$)

8. Adjuk meg a 7. feladat görbéjének egy ívhosszparaméterezését!

*(Az $s = \int_0^t 3\sqrt{\tau+1}\,d\tau = 2(t+1)^{3/2} - 2$ összefüggésből $t = (\frac{s}{2}+1)^{2/3} - 1$, és ezt az $\mathbf{r}(t)$ képletébe helyettesítve: $\mathbf{r} = \left((\frac{s}{2}+1)^{2/3} - 1,\, 2\left((\frac{s}{2}+1)^{2/3} - 1\right)^{3/2},\, \left((\frac{s}{2}+1)^{2/3} - 1\right)\sqrt{8}\right)$.
)*

Gyakorló feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{r} = (3-t, t^2-4, 2t-2)$ síkgörbe, és adjuk meg a görbét tartalmazó sík egyenletét. (Útmutatás: keressük meg azokat az A, B, C, D paramétereket, amelyekre a görbe pontjai kielégítik az $Ax + By + Cz = D$ egyenletet.)

2. Paraméterezzük az $x^2 + y^2 = z^2$ és az $x + y + z = 1$ felületek metszetgörbéjét!

3. Adjuk meg az $\mathbf{r} = \left(\frac{1}{1-t}, \ln(1+t^2), e^{-t}\right)$ görbe érintőjének egyenletrendszerét a $t_0 = 0$ paraméterű pontban.

4. Számítsuk ki az $\mathbf{r}(t) = (\cos t + t\sin t, \sin t - t\cos t, t)$ görbe ívhosszát a $0 \le t \le 1$ szakaszon!

5. Térjünk át ívhosszparaméterre az $\mathbf{r}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t)$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ görbénél!

Eredmények

1. $2x + z = 4.$
2. $\mathbf{r}(t) = (t, 1 + \frac{1}{2t-2}, -t - \frac{1}{2t-2})$ (hiperbola, amely kúp és sík metszeteként állt elő).
3. $x = 1 + t$, $y = 0$, $z = 1 - t$.
4. Az ívhossz: $\int_0^1 \sqrt{1+t^2}d\tau = \left[\frac{1}{2}\operatorname{arsh} t + \frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\operatorname{arsh} 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$. Az integrál kiszámításánál $t = \operatorname{sh} u$ helyettesítést használunk, és a $\operatorname{ch}^2 u$ kiintegrálásánál a $\operatorname{ch}^2 u = (1 + \operatorname{ch} 2u)/2$ linearizáló formulát.
5. $|\dot{\mathbf{r}}| = 5\sin t\cos t = \frac{5}{2}\sin 2t$, ebből $s = \int_0^t |\dot{\mathbf{r}}(\tau)|\,d\tau = -\frac{5}{4}\cos 2t + \frac{5}{4}$, azaz $\cos 2t = 1 - \frac{4}{5}s$. Ebből kifejezhetjük t-t, de egyszerűbb közvetlenül $\mathbf{r}(t)$ komponenseit kiszámolni, így $\mathbf{r} = \left((1 - \frac{2}{5}s)^{3/2}, (\frac{2}{5}s)^{3/2}, 1 - \frac{4}{5}s\right)$.