1. Számítsuk ki a következő határértékeket!

a) $\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\mathbf{i}+\frac{t^2+t}{t}\mathbf{j}+\frac{\cos t-1}{t^2}\mathbf{k}\right)$

b) (**Hf**) $\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t^2}{e^t},\ \frac{2t^2+2t+3}{3t^2-2},\ \sqrt{t+1}-\sqrt{t}\right)$

2. Állapítsuk meg a következő görbékről, hogy a megadott paraméterezésük ívhosszparaméteres-e! Határozzuk meg a görbék kísérő triéderét az adott paraméterértéknél!

a) $\mathbf{r}(t)=(t+1,\ t^2,\ 2t-3),\ \ t_0=2$

b) $\mathbf{r}(t)=\left(\sin\frac{t}{3},\ \cos\frac{t}{3},\ \frac{\sqrt{8}}{3}t\right),\ \ t_0=0$

c) (**Hf**) $\mathbf{r}(t)=(e^t-t)\mathbf{i}+e^{2t}\mathbf{j}-(2+e^{-t})\mathbf{k},\ \ t_0=0$

3. Írjuk föl az alábbi görbék megadott pontjában a simulósík egyenletét!

a) (**Hf**) $\mathbf{r}(t)=\frac{1}{t}\mathbf{i}+\frac{t}{t+1}\mathbf{j}-t\mathbf{k},\ \ t_0=1$

b) $\mathbf{r}(t)=(\cos^2 t,\ \sin 2t,\ \operatorname{tg} t),\ \ t_0=\frac{\pi}{4}$

4. Keressük meg az $\mathbf{r}(t)=(t+1,\ t^2-t,\ 2t)$ görbének azokat a pontjait, ahol a normálsík párhuzamos az $(1,1,1)$ vektorral! (**Hf**) Határozzuk meg itt a rektifikáló sík egyenletét is!

5. (**Hf**) Van-e az $\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}+t^3\mathbf{k}$ görbének olyan pontja, ahol a kísérő triéder éppen $\mathbf{t}=\mathbf{i}$, $\mathbf{n}=\mathbf{j}$, $\mathbf{b}=\mathbf{k}$?

6. Számítsuk ki az alábbi görbék görbületét és torzióját a megadott helyen!

a) (**Hf**) $\mathbf{r}(t)=\left(\frac{1}{t},\ t^2,\ 2+t^2\right),\ \ t_0=1$

b) $\mathbf{r}(t)=(e^{-t},\ t,\ e^t),\ \ t_0=0.$

7. (**Hf**) Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{r}(t)=(\sin^2 t,\ \sin 2t,\ \cos^2 t)$ görbe síkgörbe!

8. (**Hf**) Hol van szélsőértéke az $\mathbf{r}(t)=(e^{-t},\ \sqrt{2}t,\ e^t)$ görbe görbületének?

A házi feladatok megoldása

1. b) $\lim_{t\to\infty}\frac{t^2}{e^t}=\lim_{t\to\infty}\frac{2t}{e^t}=\lim_{t\to\infty}\frac{2}{e^t}=0,$

$\lim_{t\to\infty}\frac{2t^2+2t+3}{3t^2-2}=\lim_{t\to\infty}\frac{2+\frac{2}{t}+\frac{3}{t^2}}{3-\frac{2}{t^2}}=\frac{2}{3},$

$\lim_{t\to\infty}\sqrt{t+1}-\sqrt{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{t+1-t}{\sqrt{t+1}+\sqrt{t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\sqrt{t+1}+\sqrt{t}}=0.$

Így a vektor-vektorfüggvény limesze ∞-ben $(0,\frac{2}{3},0)$.

2. c) $\dot{\mathbf{r}}(t)=(e^t-1,2e^{2t},e^{-t})$, $|\dot{\mathbf{r}}(t)|=\sqrt{e^{2t}-2e^t+1+4e^{4t}+e^{-2t}}$ nem azonosan 1, így $\mathbf{r}(t)$ nem ívhosszparaméterezés.

$\ddot{\mathbf{r}}(t)=(e^t,4e^{2t},-e^{-t})$,

$\dot{\mathbf{r}}(0)=(0,2,1)$, $\ddot{\mathbf{r}}(0)=(1,4,-1)$, $\dot{\mathbf{r}}(0)\times\ddot{\mathbf{r}}(0)=(-6,1,-2)$,

így $\mathbf{b}=\frac{1}{\sqrt{41}}(-6,1,-2)$, $\mathbf{t}=\frac{1}{\sqrt{5}}(0,2,1)$, és $\mathbf{n}=\mathbf{b}\times\mathbf{t}=\frac{1}{\sqrt{205}}(5,6,-12)$.

3. a) $\mathbf{r}(t) = \left(\frac{1}{t},\ \frac{t}{t+1},\ -t\right)$, $\mathbf{r}(1) = (1,\ \frac{1}{2},\ -1)$,
$\dot{\mathbf{r}}(t) = \left(-\frac{1}{t^2},\ \frac{1}{(t+1)^2},\ -1\right)$, $\dot{\mathbf{r}}(1) = (-1,\ \frac{1}{4},\ -1)$,
$\ddot{\mathbf{r}}(t) = \left(\frac{2}{t^3},\ -\frac{2}{(t+1)^3},\ 0\right)$, $\ddot{\mathbf{r}}(1) = (2,\ -\frac{1}{4},\ 0)$.
$\dot{\mathbf{r}}(1) \times \ddot{\mathbf{r}}(1) = (-\frac{1}{4}, -2, -\frac{1}{4})$, tehát ez, illetve az ezzel párhuzamos $(1, 8, 1)$ vektor normálvektora a simulósíknak, $(1, \frac{1}{2}, -1)$ pedig egy pontja. Így a simulósík egyenlete $(x-1) + 8(y - \frac{1}{2}) + z + 1 = 0$, azaz $x + 8y + z = 4$.

4. $\dot{\mathbf{r}}(t) = (1,\ 2t-1,\ 2)$ a normálsík normálvektora. A normálsík akkor párhuzamos az $(1,1,1)$ vektorral, ha a normálsík normálvektora merőleges rá, azaz $(1,\ 2t-1,\ 2)(1,1,1) = 2t + 2 = 0$, vagyis $t = -1$. Itt
$\mathbf{r}(-1) = (0, 2, -2)$
$\dot{\mathbf{r}}(-1) = (1, -3, 2) \uparrow\uparrow \mathbf{t}$
$\ddot{\mathbf{r}}(-1) = (0, 2, 0)$
$\dot{\mathbf{r}}(-1) \times \ddot{\mathbf{r}}(-1) = (-4, 0, 2) \uparrow\uparrow \mathbf{b}$
így $\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t} \uparrow\uparrow \big(\dot{\mathbf{r}}(-1) \times \ddot{\mathbf{r}}(-1)\big) \times \dot{\mathbf{r}}(-1) = (-4, -8, -8)$. Tehát a rektifikáló sík egyik normálvektora az $\mathbf{n}$-nel párhuzamos $(1, 2, 2)$ vektor, a sík egyenlete pedig $x + 2y + 2z = 0$.

5. $\dot{\mathbf{r}}(t) = (1,\ 2t,\ 3t^2)$, $\ddot{\mathbf{r}}(t) = (0,\ 2,\ 6t)$, $\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t) = (6t^2,\ -6t,\ 2)$. Akkor lesz a kísérő triéder a megadott három vektor, ha $\dot{\mathbf{r}}(t)$ egyirányú $\mathbf{i}$-vel, és $\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)$ egyirányú $\mathbf{k}$-val, ez pedig $t = 0$ esetén teljesül, azaz a görbe $(0, 0, 0)$ pontjában.

6. a) $\dot{\mathbf{r}}(t) = (-t^{-2},\ 2t,\ 2t)$, $\dot{\mathbf{r}}(1) = (-1,\ 2,\ 2)$, $|\dot{\mathbf{r}}(1)| = 3$
$\ddot{\mathbf{r}}(t) = (2t^{-3},\ 2,\ 2)$, $\ddot{\mathbf{r}}(1) = (2,\ 2,\ 2)$,
$\dddot{\mathbf{r}}(t) = (-6t^{-4},\ 0,\ 0)$, $\dddot{\mathbf{r}}(1) = (-6,\ 0,\ 0)$,
$\dot{\mathbf{r}}(1) \times \ddot{\mathbf{r}}(1) = (0,\ 6,\ -6)$, $|\dot{\mathbf{r}}(1) \times \ddot{\mathbf{r}}(1)| = 6\sqrt{2}$, $\dot{\mathbf{r}}(1)\ddot{\mathbf{r}}(1)\,\dddot{\mathbf{r}}(1) = 0$,
így a görbület $6\sqrt{2}/27 = 2\sqrt{2}/9$, a torzió pedig 0 (ez utóbbi abból is látszik, hogy a görbe kielégíti a $z - y = 2$ síkegyenletet).

7. A görbe kielégíti az $x + z = 1$ egyenletet (ui. $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ minden t-re), tehát rajta van az ilyen egyenletű síkon. De bizonyíthatjuk az állítást azzal is, ha belátjuk, hogy a torziója 0.
$\dot{\mathbf{r}} = (2\sin t\cos t,\ 2\cos 2t,\ -2\sin t\cos t) = (\sin 2t,\ 2\cos 2t, -\sin 2t)$
$\ddot{\mathbf{r}} = (2\cos 2t,\ -4\sin 2t, -2\cos 2t)$
$\dddot{\mathbf{r}} = (-4\sin 2t,\ -8\cos 2t, 4\sin 2t)$

$$\dot{\mathbf{r}}\ddot{\mathbf{r}}\,\dddot{\mathbf{r}} = \begin{vmatrix} \sin 2t & 2\cos 2t & -\sin 2t \\ 2\cos 2t & -4\sin 2t & -2\cos 2t \\ -4\sin 2t & -8\cos 2t & 4\sin 2t \end{vmatrix} = \sin 2t \cdot (-16) - 2\cos 2t \cdot 0 - \sin 2t \cdot (-16) = 0.$$

8. $\dot{\mathbf{r}} = (-e^{-t},\ \sqrt{2},\ e^t)$, $\ddot{\mathbf{r}} = (e^{-t},\ 0,\ e^t)$, $\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = (\sqrt{2}e^t, 2, -\sqrt{2}e^{-t})$. Ebből a görbület $\frac{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3} = \frac{\sqrt{2e^{2t} + 4 + 2e^{-2t}}}{\sqrt{e^{-2t} + 2 + e^{2t}}} = \frac{\sqrt{2}(e^t + e^{-t})}{(e^t + e^{-t})^3} = \frac{\sqrt{2}}{(e^t + e^{-t})^2}$. Mivel $e^t + e^{-t}$ mindenhol pozitív, a görbületnek pontosan akkor van szélsőértéke, ha az $e^t + e^{-t}$ függvénynek szélsőértéke van, és a derivált vizsgálatából látszik, hogy ennek $t = 0$-nál van minimuma, így a görbületnek a $t = 0$ esetben, azaz az $(1, \sqrt{2}, 1)$ pontban van maximuma.