1. Milyen felületet írnak le a következő egyenletek?

a) $z = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ b) $z = \sqrt{x^2+y^2}$ c) $z = x + y^2$

2. Adjuk meg paraméteresen

a) az $x + 2y + z = 5$ síkot;

b) az origó középpontú, 2 sugarú gömbfelületet!

Mik lesznek az egyes paraméterekhez tartozó paramétervonalak?

3. Paraméterezzük

a) azt a ferde kúppalástot, amelynek alapja az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű kör a $z = 0$ síkon, csúcsa pedig az $(1, 2, 3)$ pont;

b) (**Hf**) azt a felületet, amelyet a $z = \frac{1}{x}$, $x > 0$ görbe z tengely körüli forgatásával kapunk!

4. Határozzuk meg a következő felületek normálvektorát a megadott pontban! Írjuk fel az adott pontbeli érintősík egyenletét is!

a) $\mathbf{r}(u, v) = (u^2 - 2v^2, u^3, v)$, $(u_0, v_0) = (1, 1)$

b) $z = x^2y + 2y^2$, $P_0(2, 1, 6)$

c) $xy^2 + z^3 = 12$, $P_0(1, 2, 2)$

d) (**Hf**) $z = y + \ln\frac{x}{2}$, $P_0(1, 1, 1)$

e) (**Hf**) $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}u + \mathbf{j}\cos u \sin v + \mathbf{k}\cos u \cos v$, $u_0 = \frac{\pi}{4}$, $v_0 = \frac{\pi}{3}$

5. Számítsuk ki a megadott felületek felszínét!

a) $\mathbf{r}(u, v) = (u\cos v, u\sin v, 2v)$, $0 \le u \le 2$, $0 \le v \le 2\pi$

b) (**Hf**) $z = x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 \le 1$

c) (**Hf**) $x^2 = 2yz$, $0 \le x \le 1$, $1 \le y \le 2$

A házi feladatok megoldása

3. b) A felületet az xy-síkkal párhuzamos körökre bonthatjuk: u magasságban a kör sugara $1/u$, középpontja pedig $(0, 0, u)$, így paraméterezése $\mathbf{r}(u, v) = (\frac{1}{u}\cos v,\ \frac{1}{u}\sin v,\ u)$, ahol $u > 0$, és $0 \le v \le 2\pi$.

4. d) $z_x = \frac{1}{x}$, $z_y = 1$, és így a normálvektor a P_0 pontban $(\frac{1}{x}, 1, -1) = (1, 1, -1)$, az érintősík pedig $(x-1) + (y-1) - (z-1) = 0$, azaz $x + y - z = 1$.

e) $\mathbf{r}_u = (1,\ -\sin u \sin v,\ -\sin u \cos v)$, $\mathbf{r}_v = (0,\ \cos u \cos v,\ -\cos u \sin v)$, $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (\sin u \cos u,\ \cos u \sin v,\ \cos u \cos v)$, és ez az $u_0 = \frac{\pi}{4}$, $v_0 = \frac{\pi}{3}$ helyen $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}},\ \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},\ \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$, tehát ez, illetve a vele párhuzamos $(1, \sqrt{3}, 1)$ vektor normálvektora a felületnek az $\mathbf{r}(u_0, v_0) = \left(\frac{\pi}{4},\ \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},\ \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ pontban vett normálvektora, és itt az érintősík egyenlete $x + \sqrt{3}y + z = \frac{\pi}{4} + \sqrt{2}$.

5. b) $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \sqrt{4x^2+4y^2+1}\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^{2\pi} \sqrt{4r^2+1}\,r\,d\varphi\,dr = \int_0^1 2\pi r\sqrt{4r^2+1}\,dr =$

$\displaystyle\frac{\pi}{4}\int_0^1 8r(4r^2+1)^{1/2}\,dr = \frac{\pi}{4}\left[(4r^2+1)^{3/2}\cdot\frac{2}{3}\right]_0^1 = \frac{13}{3}\pi$

c) $z = \dfrac{x^2}{2y}$, $z_x = \dfrac{x}{y}$, $z_y = -\dfrac{x^2}{2y^2}$,

$\sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1} = \sqrt{\dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{x^4}{4y^4} + 1} = \sqrt{\dfrac{x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4}{4y^4}} = \dfrac{x^2 + 2y^2}{2y^2} = 1 + \dfrac{x^2}{2y^2}$,

és a felszín $\displaystyle\int_1^2 \int_0^1 1 + \frac{x^2}{2y^2}\, dx\, dy = \int_1^2 \left[x + \frac{x^3}{6y^2}\right]_0^1 dy = \int_1^2 1 + \frac{1}{6y^2}\, dy = \left[y - \frac{1}{6y}\right]_1^2 = \frac{13}{12}$.