1. Írjuk fel koordinátásan a következő vektor-vektorfüggvényeket!

a) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \dfrac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$

b) (**Hf**) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \times (1,1,1)$.

2. Számítsuk ki az alábbi függvények divergenciáját és rotációját!

a) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \left(\dfrac{x}{y},\ \dfrac{y}{x},\ xz\right)$

b) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{grad}\,|\mathbf{r}|$

c) (**Hf**) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (x^2+y^3,\ 12xy-3x,\ xyz^2)$

d) (**Hf**) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (x^2y+y^3,\ x^3-xy^2)$

3. Bizonyítsuk be, hogy

a) $\operatorname{div}(u\cdot\mathbf{v}) = (\mathbf{grad}\,u)\mathbf{v} + u\operatorname{div}\mathbf{v}$;

b) (**Hf**) $\operatorname{div}(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = \mathbf{w}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{v} - \mathbf{v}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{w}$.

4. Keressük meg a következő vektor-vektorfüggvények potenciálfüggvényét, ha létezik!

a) (**Hf**) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (3x^2y-y^3)\mathbf{i} + (x^3-3xy^2)\mathbf{j}$

b) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (5x^2y-4xy,\ 3x^2-2y)$

c) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (yz,\ xz,\ xy)$

d) (**Hf**) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (yz-xy,\ xz-\frac{1}{2}x^2+yz^2,\ xy+y^2z)$

5. Számítsuk ki a görbementi integrálokat (ha szükséges, előbb paraméterezzük a görbét)!

a) (**Hf**) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (x^2,\ x+y+z,\ yz)$, $\mathcal{G}$ az AB szakasz A-ból B-be, ahol $A(1,1,1)$ és $B(2,0,-1)$.

b) (**Hf**) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (y^2-x^2)\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} - x^2\mathbf{k}$, $\mathcal{G} : \mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3)$, $(0 \le t \le 1)$

c) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$, $\mathcal{G} : x^2+y^2 = 1$, $z = 0$ kör $x \ge 0$ féltérbe eső része, $(0,1)$-nél kezdve

d) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (e^x,\ xyz,\ z)$, $\mathbf{r}(t) = (t^2,\ 1,\ \cos t)$, $0 \le t \le \pi$

6. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi vektor-vektorfüggvények potenciálosak. Számítsuk ki a megadott integrálokat a potenciálfüggvény segítségével!

a) $\mathbf{v}(\mathbf{r}_= (y^2-z^2,\ 1+2xy,\ -2xz)$, $\mathcal{G} : (2\cos t,\ 2\sin t,\ t)$, $0 \le t \le \pi)$

b) (**Hf**) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (y+z,\ x+z,\ x+y)$, $\mathcal{G}$ az $ABCD$ töröttvonal, ahol $A(1,1,1)$, $B(1,2,0)$, $C(3,2,1)$, $D(3,1,2)$.

A házi feladatok megoldása

1. b) $\mathbf{v}(x,y,z) = (y-z, z-x, x-y)$.

2. c) $\operatorname{div}\mathbf{v} = 2x+12y+2xyz$, $\mathbf{rot}\,\mathbf{v} = (xz^2, -yz^2, 12y-3-3y^2)$

d) $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$, $\mathbf{rot}\,\mathbf{v} = (0,\ 0,\ 2x^2-4y^2)$ (a $\mathbf{v}$ függvényt $\mathbf{v} = (x^2y+y^3, x^3-xy^2, 0)$ alakban $\mathbb{R}^3$-belinek tekintve)

3. b) $\operatorname{div}(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = \operatorname{div}(v_2w_3 - v_3w_2,\ v_3w_1 - v_1w_3,\ v_1w_2 - v_2w_1) =$
$\Big((v_2)_x w_3 + v_2(w_3)_x - (v_3)_x w_2 - v_3(w_2)_x\Big)+$
$\Big((v_3)_y w_1 + v_3(w_1)_y - (v_1)_y w_3 - v_1(w_3)_y\Big)+$
$\Big((v_1)_z w_2 + v_1(w_2)_z - (v_2)_z w_1 - v_2(w_1)_z\Big) =$
$\Big((v_3)_y - (v_2)_z\Big)w_1 + \Big((v_1)_z - (v_3)_x\Big)w_2 + \Big((v_2)_x - (v_1)_y\Big)w_3+$
$v_1\Big((w_2)_z - (w_3)_y\Big) + v_2\Big((w_3)_x - (w_1)_z\Big) + v_3\Big((w_1)_y - (w_2)_x\Big) =$
$(\mathbf{rot}\,\mathbf{v})\mathbf{w} + \mathbf{v}(\mathbf{rot}\,\mathbf{w})$.

4. a) Olyan $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ függvényt keresünk, amelyre $u_x = 3x^2y - y^3$, és $u_y = x^3 - 3xy^2$. Az elsőből $u = \int 3x^2y - y^3\,dx = x^3y - xy^3 + g(y)$, és erre $u_y = x^3 - 3xy^2 + g'(y) = x^3 - 3xy^2$, tehát $g'(y) = 0$, és $g(y) = C$ konstans. Így $u = x^3y - xy^3 + C$.

d) Olyan $u:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ függvényt keresünk, amelyre $u_x = yz - xy$, $u_y = xz - \frac{1}{2}x^2 + yz^2$, $u_z = xy + y^2z$. Az elsőből $u = \int yz - xy\,dx = xyz - \frac{1}{2}x^2y + g(y,z)$, amire $u_y = xz - \frac{1}{2}x^2 + g_y(y,z) = xz - \frac{1}{2}x^2 + yz^2$, tehát $g_y(y,z) = yz^2$, így $g(y,z) = \int yz^2\,dy = \frac{1}{2}y^2z^2 + h(z)$. Visszahelyettesítve az u-ba: $u = xyz - \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}y^2z^2 + h(z)$. Ezt összevetjük a harmadik feltétellel: $u_z = xy + y^2z + h'(z) = xy + y^2z$, amiből $h'(z) = 0$, azaz $h(z) = C$ konstans, tehát $u = xyz - \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}y^2z^2 + C$.

5. a) $\mathcal{G}:\ \mathbf{r}(t) = \vec{OA} + t\vec{AB} = (1+t, 1-t, 1-2t)$, $(0\le t\le 1)$, $\dot{\mathbf{r}}(t) = (1,-1,2)$, $\mathbf{v}(\mathbf{r}(t)) = ((1+t)^2, 3-2t, 2t^2-3t+1)$, és $\mathbf{v}(\mathbf{r}(t))\dot{\mathbf{r}}(t) = -3t^2 + 10t - 4$.

$$\int_{\mathcal{G}} \mathbf{v}(\mathbf{r})\,\mathbf{dr} = \int_0^1 -3t^2 + 10t - 4 = \Big[-t^3 + 5t^2 - 4t\Big]_0^1 = 0.$$

b) $\dot{\mathbf{r}}(t) = (1, 2t, 3t^2)$, $\mathbf{v}(\mathbf{r}(t)) = (t^4 - t^2, 2t, -t^2)$, $\mathbf{v}(\mathbf{r}(t))\dot{\mathbf{r}}(t) = 4t^6 - 2t^4 - t^2$,

$$\int_{\mathcal{G}} \mathbf{v}(\mathbf{r})\,\mathbf{dr} = \int_0^1 4t^6 - 2t^4 - t^2\,dt = -\frac{17}{105}.$$

6. A $\mathbf{v}$ vektor-vektorfüggvény egy potenciálfüggvénye $u = xy + xz + yz$, így $\int_{\mathcal{G}} \mathbf{v}(\mathbf{r})\,\mathbf{dr} =$

$$\Big[xy + xz + yz\Big]_{(1,1,1)}^{(3,1,2)} = 11 - 3 = 8.$$