1. Bizonyítsuk be, hogy a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (2x + 6xz,\ -2y,\ 3x^2 - 3z^2)$ vektor-vektorfüggvény forrásmentes és örvénymentes is.

2. Számítsuk ki a következő vektor-vektorfüggvények felületi integrálját a megadott felületeken! (**Hf**: c))

a) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (x,\ -y,\ z)$, $\mathcal{F}$: $\mathbf{r}(u,v) = (u + 2v,\ v,\ u - v)$, $0 \le u \le 3$, $0 \le v \le 1$, a normálvektorok lefelé mutatnak

b) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}|\mathbf{r}|^3$, $\mathcal{F}: x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \ge 0$, felfelé irányítva

c) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (x, y, z)$, $\mathcal{F}$: $\mathbf{r}(u,v) = (3\cos v,\ 3\cos u \sin v,\ \sin u)$, $0 \le u \le \pi$, $0 \le v \le 2\pi$, $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$-vel irányítva (korábban tévesen $\mathbf{r}(u,v) = (3\cos v,\ 3\cos v \sin v,\ \sin u)$ szerepelt, azon 0 az integrál)

3. Számítsuk ki a következő zárt felületeken a felületi integrált (használjuk a Gauss–Osztrogradszkij-tételt) (**Hf**: b),c)):

a) $\iint\limits_{\mathcal{F}} (xz, xy, yz)\,\mathbf{dF}$, ahol $\mathcal{F}$ a $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ felület és a $z = 0$ sík által határolt tartomány felülete, befelé mutató normálvektorokkal;

b) $\iint\limits_{\mathcal{F}} (x^3, y^3, z^3)\,\mathbf{dF}$, ahol $\mathcal{F}$ az $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ egyenletű gömbfelület, kifelé mutató normálvektorokkal;

c) $\iint\limits_{\mathcal{F}} (xe^z, ze^x, ye^y)\,\mathbf{dF}$, ahol $\mathcal{F}$ a $3z^2 = x^2 + y^2$ kúp felső térfélbe eső része és az $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ gömb által határolt térbeli tartomány teljes felülete kifelé mutató normálvektorokkal!

A házi feladatok megoldása

2. c) $\mathbf{r}_u = (0,\ -3\sin u \sin v,\ \cos u)$, $\mathbf{r}_v = (-3\sin v,\ 3\cos u \cos v,\ 0)$,
$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (-3\cos^2 u \cos v,\ -3\cos u \sin v, -9\sin u \sin^2 v)$,
$\mathbf{v}(\mathbf{r}(u,v)) = (3\cos v,\ 3\cos u \sin v,\ \sin u)$,
$\mathbf{v}(\mathbf{r}(u,v))(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) = -9\cos^2 u \cos^2 v - 9\cos^2 u \sin^2 v - 9\sin^2 u \sin^2 v =$
$-9\cos^2 u - 9\sin^2 u \cos^2 v = -9\cos^2 u - 9\sin^2 u + 9\sin^2 u \cos^2 v = -9 + 9\sin^2 u \cos^2 v$

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} -9 + 9\sin^2 u \cos^2 v \, dv\, du = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} -9 + \tfrac{9}{2}(\sin^2 u)(1 + \cos 2v)\, dv\, du =$$
$$\int_0^\pi \left[-9v + \tfrac{9}{2}(\sin^2 u)v + \tfrac{9}{4}\sin^2 u \cos 2v\right]_0^{2\pi} du = \int_0^\pi -18\pi + 9\pi \sin^2 u\, du =$$
$$\int_0^\pi -18\pi + \tfrac{9}{2}\pi(1 - \cos 2u)\, du = \left[-\tfrac{27}{2}\pi u - \tfrac{9}{4}\pi \sin 2u\right]_0^\pi = -\tfrac{27}{2}\pi^2.$$

3. b) $div\mathbf{v} = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2$, tehát a kiszámítandó integrál
$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1} 3x^2 + 3y^2 + 3z^2\, dx\, dy\, dz$. Gömbi koordinátákra áttérve:

$$\int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} 3R^2 \cdot R^2 \sin\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta\, dR = \int_0^1 \int_0^\pi 6\pi R^4 \sin\vartheta\, d\vartheta\, dR = \int_0^1 12\pi R^4\, dR = \tfrac{12}{5}\pi.$$

c) $divv = e^z$, tehát ezt kell a kúp és a gömbfelület által határolt térbeli tartományon integrálni. Érdemes áttérni gömbi koordinátákra. A kúp egyenlete gömbi koordinátákkal felírva (a $4z^2 = x^2 + y^2 + z^2$ alakból) $4R^2\cos^2\vartheta = R^2$, azaz $4\cos^2\vartheta = 1$, és ezt tovább alakítva $\theta = \frac{\pi}{3}$, a gömbé pedig $R = 2$. Így a kiszámítandó integrál:

$\int\limits_0^2 \int\limits_0^{\pi/3} \int\limits_0^{2\pi} e^{R\cos\vartheta} R^2 \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \, dR = \int\limits_0^2 \int\limits_0^{\pi/3} 2\pi e^{R\cos\vartheta} R^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, dR = \int\limits_0^2 \left[2\pi R e^{R\cos\vartheta}\right]_0^{\pi/3} dR$
$= \int\limits_0^2 2\pi R e^{R/2} - 2\pi R e^R \, dR = \left[4\pi R e^{R/2}\right]_0^2 - \int\limits_0^2 4\pi e^{R/2} \, dR - \left[2\pi R e^R\right]_0^2 + \int\limits_0^2 2\pi e^R \, dR =$
$\left[4\pi R e^{R/2} - 8\pi e^{R/2} - 2\pi R e^R + 2\pi e^R\right]_0^2 = 6\pi - 2\pi e^2.$