1. Számítsuk ki a következő zárt görbéken az integrált Stokes-tétellel és anélkül:

a) a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (y^2, z^2, x^2)$ függvény integrálja az $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ és $C(0,0,1)$ pontokon, majd újra az A ponton keresztülhaladó zárt törtvonal mentén;

b) (**Hf**) a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (x, x+y, x+y+z)$ függvény integrálja az $x^2+y^2 = 4$, $z = 2$ egyenletekkel meghatározott körvonalon, pozitív irányban.

2. A Green-tétel felhasználásával számítsuk ki a

a) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (3x^2e^{y^2}, 2x^3ye^{y^2})$ függvény integrálját a $\mathcal{G}: \ \mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t), \ \ 0 \le t \le \pi$ görbe mentén;

b) (**Hf**) a $\mathbf{v} = (xy^2+3y, -x^2y)$ függvény integrálját az $A(-2,0)$, $B(0,1)$, $C(2,0)$ pontokon keresztülhaladó töröttvonal mentén.

3. (**Hf**) Számítsuk ki a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (xe^z, \ y^2, \ -2yz)$ függvény felületmenti integrálját a $z = x^2+y^2$ paraboloid és a $z = 4$ sík által határolt korlátos tartomány teljes felületén, kifelé mutató normálvektorokkal.

4. Számítsuk ki a következő vektor-vektor függvényeknek a megadott felületen vett skalárértékű és vektorértékű integrálját (a felületet a $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ normálvektorokkal irányítva).

a) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (z, y, y)$, $\mathcal{F}: \ \mathbf{r}(u,v) = (u+v, v, u-v)$, a paramétertartomány pedig a $(0,0)$, $(1,0)$ és $(0,1)$ csúcsú háromszög.

b) (**Hf**) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$, $\mathcal{F}: \ \mathbf{r}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, 2), \ \ 0 \le u \le 1, \ 0 \le v \le \frac{\pi}{2}$.

5. (**Hf**) Határozzuk meg az $\mathbf{r}(u,v) = (u\cos v, \ u\sin v, \ \frac{1}{2}(v+u^2))$ felület $|u| \le v, \ \ 0 \le u \le 2$ paramétertartományhoz tartozó darabjának a felszínét.

A házi feladatok megoldása

1. b) $\mathbf{r}(t) = (2\cos t, \ 2\sin t, \ 2), \ \ \dot{\mathbf{r}}(t) = (-2\sin t, \ 2\sin t, \ 2)$,
$\mathbf{v}(\mathbf{r}(t)) = (2\cos t, \ 2\cos t + 2\sin t, \ 2 + 2\cos t + 2\sin t)$,
$\mathbf{v}(\mathbf{r}(t))\dot{\mathbf{r}}(t) = 4\cos^2 t$,
$\int_{\mathcal{G}} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \ \mathbf{dr} = \int_0^{2\pi} 4\cos^2 t \, dt = \int_0^{2\pi} 2 + 2\cos 2t \, dt = [2t + \sin 2t]_0^{2\pi} = 4\pi.$
vagy Stokes-tétellel:
$\mathbf{rot}(\mathbf{v}) = (1, -1, 1)$,
és a sík $\mathbf{r}(x,y) = (x,y,2)$ paraméterezéséhez a normálvektor $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = (0,0,1)$, a paramétertartomány pedig $x^2 + y^2 \le 4$
$\iint_{\mathcal{F}} (1,-1,1)(0,0,1) \, \mathbf{dF} = \iint_{\mathcal{F}} 1 \, \mathbf{dF}$, ez pedig az $x^2 + y^2 \le 4$ kör területe, azaz 4π.

2. b) $\dfrac{\partial v_2}{\partial x} - \dfrac{\partial v_1}{\partial y} = 3$, és a felület az ABC háromszögtartomány. Mivel konstans függvényt kell ezen a tartományon integrálni, az eredmény egyszerűen tartomány területének megfelelő többszöröse, azaz $3 \cdot 2 = 6$.

3. A Gauss–Osztrogradszkij-tétel szerint az integrál megegyezik $\operatorname{div} \mathbf{v} = e^z + 2y - 2y = e^z$ integráljával a paraboloid és a sík által határolt térbeli tartományon. A tartomány vetülete az xy-síkra a metszetkör vetülete, azaz az origó körüli 2 sugarú kör. Hengerkoordinátákkal

felírva az integrált: $\int\limits_0^2 \int\limits_{r^2}^4 \int\limits_0^{2\pi} e^m r\, d\varphi\, dm\, dr = \int\limits_0^2 \int\limits_{r^2}^4 2\pi r e^m\, dm\, dr = \int\limits_0^2 [2\pi r e^m]_{r^2}^4\, dr =$
$\int\limits_0^2 2\pi r e^4 - 2\pi r e^{r^2}\, dr = \left[\pi r^2 e^4 - \pi e^{r^2}\right]_0^2 = 3\pi e^4 + \pi.$

4. b) $\mathbf{r}_u = (\cos v, \sin v, 0)$, $\mathbf{r}_v = (-u\sin v, u\cos v, 0)$
$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (0, 0, u)$, $\mathbf{v}(\mathbf{r}(u,v)) = (u\cos v, u\sin v, 2)$,
$\mathbf{v}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) = 2u$
$\mathbf{v}(\mathbf{r}(u,v)) \times (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) = (u^2\sin v, -u^2\cos v, 0)$.
Ebből a skalárértékű integrál $\int_0^{\pi/2}\int_0^1 2u\, du\, dv = \frac{\pi}{2}$,
és a vektorértékű $\int_0^{\pi/2}\int_0^1 (u^2\sin v,\ -u^2\cos v,\ 0)\, du\, dv =$
$= \left(\int_0^{\pi/2}\int_0^1 u^2\sin v\, du\, dv,\ \int_0^{\pi/2}\int_0^1 -u^2\cos v\, du\, dv,\ \int_0^{\pi/2}\int_0^1 0\, du\, dv\right) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0).$

5. $\mathbf{r}_u = (\cos v,\ \sin v,\ u)$, $\mathbf{r}_v = (-u\sin v,\ u\cos v,\ \frac{1}{2})$
$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (\frac{1}{2}\sin v - u^2\cos v,\ -u^2\sin v - \frac{1}{2}\cos v,\ u)$,
$|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = \sqrt{\frac{1}{4}\sin^2 v + u^4\cos^2 v - u^2\sin v\cos v + u^4\sin^2 v + \frac{1}{4}\cos^2 v + u^2\sin v\cos v + u^2}$
$= \sqrt{u^4 + u^2 + \frac{1}{4}} = u^2 + \frac{1}{2}$, és a felszín $\int\limits_0^2 \int\limits_{-u}^{u} u^2 + \frac{1}{2}\, dv\, du = 10.$