1. Döntsük el, hogy konvergensek-e, abszolút konvergensek-e az alábbi számsorok! (**Hf**: b),e),h))

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+4^n}{3^n+5^n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{n+1}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n+1}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$ f) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ g) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{n^2+1}$ h) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln^2 n}$

2. Határozzuk meg a következő függvénysorok értelmezési tartományát és konvergenciatartományát! (**Hf**: b),c),d))

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{|x|}{x}\right)^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!(z+3)^n}$ d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-1}\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^n$

3. Határozzuk meg a következő hatványsorok konvergenciatartományát! (**Hf**: b),d))

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2 \cdot 2^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)^2} x^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n x^n$ d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n+2^n}{n}(x+1)^n$

4. Adjuk meg a következő hatványsorok összegfüggvényét! (**Hf**: c),d))

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot 2^n (x-1)^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+2^n}{n}(x+1)^n$ d) $\sum_{n=0}^{\infty}(1+ni)(iz)^n$

5. Adjuk meg a következő függvények 0 körüli Taylor-sorát! (**Hf**: c), d))

a) $\frac{1}{x+1}$ b) xe^x c) $\cos^2 x$ d) $\operatorname{arctg} x$

A házi feladatok megoldása

1. b) (Egy elírást kijavítottam a feladatban, így most eltér a korábbitól.) A sorozat pozitív tagú, és $\left(\frac{2^n+4^n}{3^n+5^n}\right) \Big/ \left(\frac{4^n}{5^n}\right) = \frac{(\frac{2}{4})^n+1}{(\frac{3}{5})^n+1} \to 1$, így az eredeti sorozat pontosan akkor konvergens, ha $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n$ konvergens, az utóbbi pedig egy 1-nél kisebb hányadosú mértani sor, tehát konvergens.

e) A gyökkritériummal: $\sqrt[n]{\frac{2n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}} = \frac{\sqrt[n]{2}(\sqrt[n]{n})^2}{2+\frac{1}{n}} \to \frac{1 \cdot 1^2}{2+0} = \frac{1}{2} < 1$, így a sor konvergens (és természetesen abszolút konvergens is, mert pozitív tagú).

h) A sor váltakozó előjelű, 0-hoz tartó tagú, és a tagok abszolút értékben monoton fogyók, így Leibniz-sor, és ezért konvergens. Azt, hogy abszolút konvergens-e, azaz a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$ sor konvergens-e, az integrálkritériummal lehet eldönteni. Az $f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}$ függvény nemnegatív, monoton fogyó, és a végtelenben a 0-hoz tart, tehát alkalmazható itt az integrálkritérium. $\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x}\, dx = \left[-\frac{1}{\ln x}\right]_2^{\infty} = \frac{1}{\ln 2} < \infty$, tehát az integrál, és így a sor is konvergens, és emiatt az eredeti sor abszolút konvergens is. (Egyébként az abszolút konvergenciából következik az eredeti sorozat konvergenciája is, tehát arra sem kell hivatkozni, hogy Leibniz-sor.)

2. b) A sor $\mathbb{R}\setminus\{0\}$-n van értelmezve. $x > 0$-ra a sor $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, ami divergens, $x < 0$-ra pedig $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot(-1)^n$, ami konvergens (Leibniz-sor). Tehát a konvergenciatartomány $(-\infty, 0)$.

c) A sor értelmezési tartománya $\mathbb{C}\setminus\{-3\}$. A hányadoskritériummal:
$\left|\left(\frac{1}{(n+1)!(z+3)^{n+1}}\right)\Big/\left(\frac{1}{n!(z+3)^n}\right)\right| = \frac{1}{(n+1)|z+3|} \to 0 < 1$ minden $z \in \mathbb{C}\setminus\{3\}$-ra, tehát a sor konvergenciatartománya megegyezik az értelmezési tartományával.

d) Az értelmezési tartomány $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$. A konvergenciatartományt a gyökkritériummal határozzuk meg: az n-edik tag abszolút értékének n-edik gyöke $\frac{1}{\sqrt[n]{n-1}}\left|\frac{2-x}{2+x}\right| = \left((n-1)^{1/(n-1)}\right)^{-(n-1)/n}\left|\frac{2-x}{2+x}\right| \to 1^{-1}\cdot\left|\frac{2-x}{2+x}\right| = \left|\frac{2-x}{2+x}\right| < 1$, ha $|2-x| < |2+x|$, azaz ha $(2-x)^2 < (2+x)^2$, és ez kifejtve azt adja, hogy $-4x < 4x$, azaz $x > 0$. Így a függvénysor $x > 0$-ra abszolút konvergens, $x < 0$-ra divergens, $x = 0$-ra pedig $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-1}$, ami Leibniz-sor, ezért konvergens. A konvergenciatartomány ezek szerint $[0, \infty)$.

3. b) A hányadoskritériumot alkalmazva azt kapjuk, hogy a sor $(n+1)$-edik és n-edik tagja hányadosának abszolút értéke $(n+1)\frac{(n+1)^2}{(n+2)^2}|x| \to \infty$, ha $x \neq 0$, így a sor csak $x = 0$ esetén konvergens.

d) Hányadoskritériummal: az $(n+1)$-edik és az n-edik tag hányadosának abszolút értéke $\frac{3^{n+1}+2^{n+1}}{3^n+2^n}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot|x+1| = \frac{3^{n+1}(1+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1})}{3^n(1+\left(\frac{2}{3}\right)^n)}\cdot(1+\frac{1}{n})\cdot|x+1| \to 3\cdot|x+1| < 1$, ha $|x+1| < \frac{1}{3}$, azaz $-\frac{4}{3} < x < -\frac{2}{3}$. Tehát itt abszolút konvergens a sor. Az intervallum külsejében divergens, és még a határokat kell ellenőrizni. $x = -\frac{2}{3}$-ra a sor $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{3^n n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}{n}$ divergens a minoránskritérium miatt, mert a nála kisebb harmonikus sor is divergens. $x = -\frac{4}{3}$-ra a $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}{n}$ sort kapjuk, amely Leibniz-sor (váltakozó előjelű, és a tagok 0-hoz tartanak, továbbá $1+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} < 1+\left(\frac{2}{3}\right)^n$, és $n+1 > n$ miatt $\frac{1+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{n+1} < \frac{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}{n}$, tehát a tagok abszolút értéke monoton fogyó), tehát konvergens. Így a konvergenciatartomány $[-\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$.

4. c) A sor felbontható két $\sum\frac{1}{n}x^n$ típusú sor összegére. Ennek a deriváltja mértani sor, tehát azt tudjuk összegezni, aztán integrálással megkapjuk az eredeti sor összegét. Legyen

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$. Ekkor $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$, így $f(x) = -\ln|1-x| + C$. Az $x = 0$ értéket behelyettesítve kapjuk, hogy $C = 0$, tehát ha a sor abszolút konvergens, azaz $|x| < 1$, akkor $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = \ln|1-x| = \ln(1-x)$. A feladatban szereplő összeg ebből $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{n} (x+1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} (3(x+1))^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} (2(x+1))^n = \ln(-2-3x) + \ln(-1-2x)$, feltéve, hogy $|3x+3|$ és $|2x+2|$ is kisebb 1-nél, azaz $x \in (-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$. (A konvergenciatartomány határán is érvényes az összegképlet, ha a kapott összeg ott konvergens a megfelelő oldalról, tehát $x = -\frac{4}{3}$-ban is.)

d) Ez a sor egy mértani sornak és egy $\sum nx^n$ típusúnak az összege, és az utóbbit lényegében egy mértani sor deriválásával kaphatjuk. $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = x \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' = x \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)' = x \cdot \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$, ha $|x| < 1$. Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy ha $|z| < 1$, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} (1+ni)(iz)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (iz)^n + \sum_{n=0}^{\infty} ni(iz)^n = \frac{1}{1-iz} + \frac{i \cdot iz}{(1-iz)^2} = \frac{1-iz-z}{(1-iz)^2}$.

5. Felhasználjuk azt, hogy ha $f(x)$ előállítható az x_0 egy teljes környezetében egy $\sum_{n=0}^{\infty} (x-x_0)^n$ hatványsor összegeként, akkor $f^{(n)}(x_0) = n! a_n$, tehát ez a sor a függvény x_0 körüli Taylor-sora.

c) $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (2x)^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{(2n)!} x^{2n}$.

d) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ a mértani sor összegképlete alapján, és így $\operatorname{arctg} x = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$. Az $x = 0$ behelyettesítésével megkapjuk, hogy $C = 0$, tehát $\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$, ha $|x| < 1$, és így ez az $\operatorname{arctg} x$ függvény Taylor-sora.