1. Írjuk fel az alábbi függvényeket $f(x+yi) = u(x,y) + iv(x,y)$ alakban.

a) $f(z) = z^2 + \frac{1}{z}$ b) (**Hf**) $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$

2. Adjuk meg algebrai alakban a következő komplex függvényértékeket! (**Hf**: b), e))

a) $e^{5+\frac{\pi}{2}i}$ b) $e^{1-i\arcsin(1/3)}$ c) $\operatorname{ch}(\ln 3 + i\frac{\pi}{4})$ d) $\cos(-i)$ e) $\operatorname{tg}\frac{i\pi}{2}$

3. Adjuk meg a következő komplex számok összes logaritmusát, és a logaritmus főértékét!

a) $\ln(-5+5i)$ b) (**Hf**) $\ln(-e)$. c) (**Hf**) $\ln(\sqrt{3}+i)$

4. Oldjuk meg az egyenleteket a komplex számok körében!

a) $\sin z = -2$ b) (**Hf**) $\operatorname{tg} z = -i$ c) (**Hf**) $\cos z = i\sqrt{3}$

5. Számítsuk ki a következő hatványokat! (**Hf**: a), b), d))

a) i^i b) $(i+1)^i$ c) 2^{5i} d) $i^{1/2}$

6. Differenciálhatók-e valahol az alábbi komplex függvények? Ahol differenciálható, ott adjuk is meg a deriváltat!

a) $|z|^2$ b) (**Hf**) $\cos\bar{z}$

7. Határozzuk meg azt a reguláris $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ függvényt, amelyre

a) $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, $f(\pi) = \frac{1}{\pi}$; b) (**Hf**) $v(x,y) = 2y(x+1)$, $f(i) = 2i-1$.

A házi feladatok megoldása

1. b) $f(x+yi) = \dfrac{x+yi+1}{x+yi-1} = \dfrac{x+1+yi}{x-1+yi} = \dfrac{(x+1+yi)(x-1-yi)}{(x-1)^2+y^2} = \dfrac{x^2+y^2-1-2yi}{(x-1)^2+y^2} = \dfrac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2} + i\dfrac{-2y}{(x-1)^2+y^2}$.

2. b) $e^{1-i\arcsin(1/3)} = e(\cos(-\arcsin(1/3)) + i\sin(-\arcsin(1/3))) = e\left(\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} - \frac{1}{3}i\right) = \dfrac{2\sqrt{2}e}{3} - \dfrac{e}{3}i.$

e) $\operatorname{tg}\dfrac{i\pi}{2} = \dfrac{\sin\frac{i\pi}{2}}{\cos\frac{i\pi}{2}} = \dfrac{i\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{2}} = i\operatorname{th}\dfrac{\pi}{2}$

3. b) A $-e$ szám trigonometrikus alakja $e(\cos\pi + i\sin\pi)$, így $\ln(-e) = \ln e + i(\pi + 2k\pi)i = 1 + (2k+1)\pi i$, a logaritmus főértéke pedig $1 + \pi i$.

c) $\sqrt{3} + i = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$, így $\ln(\sqrt{3}+i) = \ln 2 + i(\frac{\pi}{6} + 2k\pi)$, a logaritmus főértéke pedig $\ln 2 + i\frac{\pi}{6}$.

4. b) $\operatorname{tg} z = \dfrac{\sin z}{\cos z} = \dfrac{-i\operatorname{sh}(iz)}{\operatorname{ch}(iz)} = -i\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}$, így a $\operatorname{tg} z = -i$ egyenlet $e^{iz} - e^{-iz} = e^{iz} + e^{-iz}$ alakra hozható, ami az $e^{-iz} = 0$ egyenlettel ekvivalens, aminek nincs megoldása.

c) $\cos z = i\sqrt{3} \Leftrightarrow \operatorname{ch} iz = i\sqrt{3} \Leftrightarrow e^{iz} + e^{-iz} = i2\sqrt{3} \Leftrightarrow (e^{iz})^2 - i2\sqrt{3}e^{iz} + 1 = 0$. Ebből $e^{iz} = \dfrac{i2\sqrt{3} \pm \sqrt{-12-4}}{2} = i\sqrt{3} \pm 2i = i(\sqrt{3} \pm 2)$. Az első megoldás trigonometrikus alakja

$(2+\sqrt{3})(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$, amiből $iz=\ln(2+\sqrt{3})+i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)$, és $z=\frac{\pi}{2}+2k\pi-i\ln(2+\sqrt{3})$, a másodiké $(2-\sqrt{3})(\cos(-\frac{\pi}{2})+i\sin(-\frac{\pi}{2}))$, amiből $iz=\ln(2-\sqrt{3})+i(-\frac{\pi}{2}+2k\pi)$, és így $z=-\frac{\pi}{2}+2k\pi-i\ln(2-\sqrt{3})$.

5. a) $i^i=e^{i\ln i}$, ahol $\ln i=\ln(1\cdot(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}))=0+i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)$, és így $i^i=e^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}$. (A hatvány főértéke ott van, ahol a logaritmus főértékét vesszük, tehát i^i főértéke $e^{-\frac{\pi}{2}}$.

b) $(i+1)^i=e^{i\ln(i+1)}$, ahol $\ln(i+1)=\ln(\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}))=\ln\sqrt{2}+i(\frac{\pi}{4}+2k\pi)=\frac{\ln 2}{2}+i(\frac{\pi}{4}+2k\pi)$, tehát $(i+1)^i=e^{-(\frac{\pi}{4}+2k\pi)+i(\ln 2)/2}=e^{-(\frac{\pi}{4}+2k\pi)}(\cos\frac{\ln 2}{2}+i\sin\frac{\ln 2}{2})$.

d) $i^{1/2}=e^{(1/2)\ln i}=e^(i/2)(\frac{\pi}{2}+2k\pi)=e^{i(\frac{\pi}{4}+k\pi)}=\cos(\frac{\pi}{4}+k\pi)+i\sin(\frac{\pi}{4}+k\pi)=\pm(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i)$. (Ez természetesen megegyezik az i két négyzetgyökével, mert a hatványazonosságok érvényessége miatt az $\frac{1}{n}$-edik hatvány a komplex számoknál is az n-edik gyököket jelenti.)

6. b) $\cos(\overline{x+yi})=\cos(x-yi)=\cos x\cos(yi)+\sin x\sin(yi)=\cos x\operatorname{ch}y+i\sin x\operatorname{sh}y=u(x,y)+iv(x,y)$. A kapott $u(x,y)=\cos x\operatorname{ch}y$ és $v(x,y)=\sin x\operatorname{sh}y$ kétváltozós függvények mindegyike differenciálható. A Cauchy–Riemann-differenciálegyenletek szerint az$f$ függvény differenciálhatósághoz az kell még, hogy $u_x=v_y$ és $u_y=-v_x$ legyen. $u_x=-\sin x\operatorname{ch}y$, $v_y=\sin x\operatorname{ch}y$, $u_y=\cos x\operatorname{sh}y$, és $v_x=\cos x\operatorname{sh}y$, tehát a két egyenlet csak akkor teljesülhet egyszerre, ha $\sin x\operatorname{ch}y=\cos x\operatorname{sh}y=0$. De $\operatorname{ch}y\geq 1$ minden y-ra, tehát $\sin x=0$, azaz $x=k\pi$ valamely $k\in\mathbb{Z}$-re, és a második egyenletből $\operatorname{sh}y=0$ miatt $y=0$. Így a függvény a $z=k\pi$ helyeken differenciálható, és itt a deriváltja $u_x+iv_x=0$.

7. b) $u_x=v_y=2(x+1)$, és $u_y=-v_x=-2y$. Így $u(x,y)=\int 2(x+1)\,dx=(x+1)^2+g(y)$, amiből $u_y=g'(y)=-2y$, tehát $g(y)=-y^2+C$, és $u(x,y)=(x+1)^2-y^2+C$, és $f(x+yi)=(x+1)^2-y^2+C+2y(x+1)i$. Az $f(i)=2i-1$ feltétel miatt $2i-1=1-1+C+2i$, tehát $C=-1$, és $f(x+yi)=(x+1)^2-y^2+2y(x+1)i-1$. (A függvényt kifejezhetjük z-vel is: $f(x)=x^2-y^2+2xyi+2x+2yi=z^2+2z$.)