1. Számítsuk ki az $f(z)$ függvény integrálját a megadott $\mathcal{G}$ görbe mentén:

a) $f(z) = iz^2 - 2\bar{z}$, $\mathcal{G}:\ |z| = 2$, $\operatorname{Re} z \geq 0$, $\operatorname{Im} z \geq 0$, a kör negatív irányítása szerint;

b) $f(z) = \operatorname{Re}(z + z^2)$, $\mathcal{G}$ a $y = x^2$ $(0 \leq x \leq 1)$ egyenletű parabola a komplex síkon, és az irány az x növekedésének iránya;

c) (**Hf**) $f(z) = \dfrac{z+2}{z}$, $\mathcal{G}$ a $|z| = 2$, $\operatorname{Im} z \leq 0$ körív, pozitív forgásiránnyal;

d) $f(z) = 3z^2 + 2z$, $\mathcal{G}$ az $1 - i$, $2 - i$, $2 + i$ pontokat összekötő törtvonal.

2. A Cauchy-féle integrálformula segítségével számítsuk ki a következő integrálokat:

a) $\displaystyle\oint_{\mathcal{G}} \frac{\cos z}{z^2 + iz}\, dz$, ahol $\mathcal{G}$ a $-i$ középpontú, $\frac{1}{2}$ sugarú kör, pozitív körüljárással;

b) $\displaystyle\oint_{\mathcal{G}} \frac{\operatorname{ch} z}{z^5}\, dz$, ahol $\mathcal{G}$ egy origó középpontú kör, negatív körüljárással;

c) (**Hf**) $\displaystyle\oint_{\mathcal{G}} \frac{1}{z(z^2 - 1)}\, dz$, ahol $\mathcal{G}:\ |z - 1| = \frac{3}{2}$, pozitív irányban;

d) $\displaystyle\oint_{\mathcal{G}} \frac{e^z}{z^4 - z^3}\, dz$, ahol$\mathcal{G}$ a $|z - 2| = 3$ egyenletű kör, pozitív irányban;

e) (**Hf**) $\displaystyle\oint_{\mathcal{G}} \frac{1}{1 + z^2}\, dz$, ahol $\mathcal{G}$ a $|z| = 2$ egyenletű kör, pozitív irányban;

f) (**Hf**) $\displaystyle\oint_{\mathcal{G}} \frac{e^{\pi z}}{(z - i)^2(z + 1)}\, dz$, ahol $\mathcal{G}$ a $-2, 1 + 2i, 1 - 2i$ csúcsú háromszögvonal;

g) (**Hf**) $\displaystyle\oint_{\mathcal{G}} \frac{\sin z}{(z - \frac{\pi i}{2})^3}\, dz$, ahol $\mathcal{G}$ a $|z-1|+|z+1| = 4$ egyenletű ellipszis, pozitív irányban.

A házi feladatok megoldása

1. c) $z(t) = 2e^{it}$ $(\pi \leq t \leq 2t)$, $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \frac{2e^{it} + 2}{2e^{it}}(2ie^{it})\, dt = \int_{\pi}^{2\pi} 2ie^{it} + 2i\, dt = \left[2e^{it} + 2it\right]_{\pi}^{2\pi} =$ $2e^{2\pi i} - 2e^{\pi i} + 2\pi i = 2 - (-2) + 2\pi = 4 + 2\pi i.$

2. c) Az integrandus szingularitásai $0, \pm 1$ (a nevező $z(z - 1)(z + 1)$, a számláló pedig reguláris), és ezek közül 0 és 1 vannak a körön belül, tehát az integrált helyettesíthetjük egy 0 körüli ($\mathcal{G}_0$) és egy 1 körüli ($\mathcal{G}_1$) kis körön vett integrál összegével.

$$\oint_{\mathcal{G}_0} \frac{1}{z(z^2 - 1)}\, dz = \oint_{\mathcal{G}_0} \frac{\frac{1}{z^2 - 1}}{z}\, dz = \frac{2\pi i}{0!} \frac{1}{z^2 - 1}\bigg|_{z=0} = -2\pi i.$$

$$\oint_{\mathcal{G}_1} \frac{1}{z(z^2 - 1)}\, dz = \oint_{\mathcal{G}_0} \frac{\frac{1}{z^2 + z}}{z - 1}\, dz = \frac{2\pi i}{0!} \frac{1}{z^2 + z}\bigg|_{z=1} = \pi i.$$

Így a $\mathcal{G}$ körön vett integrál $-2\pi i + \pi i = -\pi i$.

e) Az integrandus szingularitásai $\pm i$ (a nevező $z^2 + 1 = (z + i)(z - i)$, a számláló reguláris), és mindkettő benne van a görbe által bezárt tartományban. Legyen $\mathcal{G}_i$ egy i körüli, $\mathcal{G}_{-i}$

egy $-i$ körüli kis kör.

$$\oint_{\mathcal{G}_i} \frac{1}{(z+i)(z-i)}\,dz = \oint_{\mathcal{G}_i} \frac{\frac{1}{z+i}}{z-i}\,dz = \frac{2\pi i}{0!}\frac{1}{z+i}\Big|_i = \pi.$$

$$\oint_{\mathcal{G}_i} \frac{1}{(z+i)(z-i)}\,dz = \oint_{\mathcal{G}_i} \frac{\frac{1}{z-i}}{z+i}\,dz = \frac{2\pi i}{0!}\frac{1}{z-i}\Big|_i = -\pi.$$

Így a $\mathcal{G}$-n az integrál 0.

f) Az integrandus szingularitásai i és -1, mindkettő benne van a megadott háromszögtartományban. Legyen $\mathcal{G}_i$ egy i körüli, $\mathcal{G}_{-1}$ egy -1 körüli kis kör.

$$\oint_{\mathcal{G}_i} \frac{e^{\pi z}}{(z-i)^2(z+1)}\,dz = \oint_{\mathcal{G}_i} \frac{\frac{e^{\pi z}}{z+1}}{(z-i)^2}\,dz = \frac{2\pi i}{1!}\left(\frac{e^{\pi z}}{z+1}\right)'\Big|_i = 2\pi i\frac{\pi e^{\pi z}(z+1)-e^{\pi z}}{(z+1)^2}\Big|_i =$$

$$2\pi i\frac{-\pi(1+i)+1}{(1+i)^2} = (\pi-\pi^2)-\pi^2 i.$$

$$\oint_{\mathcal{G}_{-1}} \frac{e^{\pi z}}{(z-i)^2(z+1)}\,dz = \oint_{\mathcal{G}_{-1}} \frac{\frac{e^{\pi z}}{(z-i)^2}}{z+1}\,dz = \frac{2\pi i}{0!}\frac{e^{\pi z}}{(z-i)^2}\Big|_{-1} = \pi e^{-\pi}.$$

Így $\mathcal{G}$-n az integrál $(\pi-\pi^2+\pi e^{-\pi})-\pi^2 i$.

g) Az integrandus egyetlen szingularitása $\frac{\pi i}{2}$, és ez az ellipszis belsejébe esik, mert $|-1+\frac{\pi i}{2}|+|1+\frac{\pi i}{2}| = 2\sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}} < 4$. $\oint_{\mathcal{G}} \frac{\sin z}{(z-\frac{\pi i}{2})^3}\,dz = \frac{2\pi i}{2!}(\sin z)''\Big|_{\pi i/2} = \pi i(-\sin z)\Big|_{\pi i/2} =$

$$-\pi i\sin\frac{\pi i}{2} = \pi\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi}{2}.$$