1. Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenletek típusát (explicit-e vagy implicit, milyen rendű, illetve fokú, homogén vagy inhomogén)!

a) $y' = 3y''' - (\operatorname{tg} x)y' + \operatorname{ch} x = 0$ b) $y'' = e^y \ln x$ c) $y'' = y^2 \cos^2 x$

2. Oldjuk meg a következő (szétválasztható) differenciálegyenleteket, illetve kezdetiérték-problémákat!

a) $xyy' + y^2 - 1 = 0$
b) $(2x+1)y' - 3y = 0, \ \ y(4) = 6$
c) (**Hf**) $(1+x^2)y' + x(1+y^2) = 0$
d) (**Hf**) $\sqrt{1-x^2}y' + xy = 0$ az $y(\frac{1}{2}) = 0$, illetve az $y(\frac{3}{5}) = 1$ kezdeti feltétellel

3. Ha a differenciálegyenlet $y' = g(y/x)$ alakra hozható, akkor $z = y/x$ függvény bevezetésével szétválaszthatóvá tehető. Oldjuk meg ennek segítségével az alábbi differenciálegyenleteket!

a) $2xyy' = y^2 - x^2, \ \ y(1) = 1$
b) (**Hf**) $xy' = xe^{y/x} + y, \ \ y(1) = 0$

4. Oldjuk meg a következő elsőrendű lineáris differenciálegyenleteket!

a) $y' - \dfrac{1}{x}y = x^2$
b) $y' + y = e^{-x}$
c) (**Hf**) $y' + y\cos x = \sin x \cos x, \ \ y(0) = 1$
d) (**Hf**) $xy' - (x+1)y = x^2 - x^3$

5. Ellenőrizzük, hogy az alábbi differenciálegyenletek egzaktak-e. Ha nem, keressünk alkalmas multiplikátort, amellyel egzakttá tehetők, és úgy oldjuk meg!

a) $x^3 - 3xy^2 + (y^2 - 3x^2y)y' = 0$
b) (**Hf**) $\ln y + ye^x + 2 + (\frac{x}{y} + e^x - \operatorname{ch} y)y' = 0$
c) $(1 - xy) + (xy - x^2)y' = 0$
d) (**Hf**) $(y\sin x - 1) + y'\cos x = 0$
e) (**Hf**) $x(y^2+1) + y(1-x^2)y' = 0$
f) (**Hf**) $2x + \cos y - (x\sin y)y' = 0, \ \ y(1) = 0$
g) (**Hf**) $e^{-y} + (xe^{-y} - 2ye^{-2y})y' = 0$

A házi feladatok megoldása

2. c)

$$\frac{y'}{1+y^2} = -\frac{x}{1+x^2}$$

$$\int \frac{1}{1+y^2}\,dy = \int -\frac{x}{1+x^2}\,dx$$

$$\operatorname{arctg}(y) = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

$$y = \operatorname{tg}\left(-\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C\right) = \operatorname{tg}\frac{A}{\sqrt{1+x^2}},$$

ahol $A = e^C > 0$.

d)

$$\begin{aligned}
\frac{y'}{y} &= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \text{ vagy } y \equiv 0 \\
\int \frac{1}{y}\, dy &= \int -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \qquad , \\
\ln|y| &= \sqrt{1-x^2} + C \\
y &= Ae^{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$

ahol $A = \pm e^C$ tetszőleges nem 0 szám, vagy $A = 0$ a szinguláris megoldás miatt. Az $y(\frac{1}{2}) = 0$ kezdeti feltételt az $y \equiv 0$ megoldás, az $y(\frac{3}{5}) = 1$ kezdeti feltételt az $y = e^{-4/5}e^{\sqrt{1-x^2}}$ megoldás elégíti ki.

3. b) A differenciálegyenlet $y' = e^{y/x} + \frac{y}{x}$ alakra hozható. $z = y/x$, azaz $y = zx$ helyettesítésnél $y' = z'x + z$.

$$\begin{aligned}
z'x + z &= e^z + z \\
z'e^{-z} &= \frac{1}{x} \\
\int e^{-z}\, dz &= \int \frac{1}{x}\, dx \\
-e^{-z} &= \ln|x| + C \\
z &= -\ln(-\ln|x| - C))
\end{aligned}$$

Mivel az $x = 1$ környékén érvényes megoldást keressük, a $z = -\ln(-\ln x - C)$ lesz a megfelelő. Ebből $y = -x\ln(-\ln x - C)$. Az $y(1) = 0$ feltételt a $C = -1$ elégíti ki: $y = -x\ln(1 - \ln x)$.

4. c) (Egy elírást utólag javítottam a feladatban!) A megfelelő homogén differenciálegyenlet, $y' + y\cos x = 0$, azaz $\dfrac{y'}{y} = -\cos x$ (ha $y \not\equiv 0$), és ebből $\ln|y| = C - \sin x$ azaz $y = Ae^{-\sin x}$, ahol $A \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Az inhomogén differenciálegyenlet megoldását az állandó variálásával $y = A(x)e^{-\sin x}$ alakban keressük. Behelyettesítve az eredeti egyenletbe: $A'(x)e^{-\sin x} - A(x)(\cos x)e^{-\sin x} + A(x)e^{-\sin x}\cos x = \sin x\cos x$, azaz $A'(x)e^{-\sin x} = \sin x\cos x$, amiből $A'(x) = e^{\sin x}\sin x\cos x$. Ebből $A(x) = \int e^{\sin x}\sin x\cos x\, dx = \int ue^u\, du$, ha $u = \sin x$ helyettesítést végzünk. Ez parciális integrálással: $\int ue^u\, du = ue^u - \int e^u\, du = (u-1)e^u + c = (-1 + \sin x)e^{\sin x} + c$, és $y = A(x)e^{-\sin x} = -1 + \sin x + ce^{-\sin x}$. A kezdeti feltételt az $y = -1 + \sin x + 2e^{-\sin x}$ függvény elégíti ki.

d) A megfelelő homogén differenciálegyenlet $\dfrac{y'}{y} = 1 + \dfrac{1}{x}$ alakra hozható ($y \not\equiv 0$ esetén, és a megoldása $\ln|y| = x + \ln|x| + C$, azaz $\ln|y| = \ln e^x e^C|x|$, tehát $y = Axe^x$. Az inhomogén differenciálegyenlet megoldását az állandó variálásával $y = A(x)xe^x$ alakban keressük. Behelyettesítés után

$$A'(x)x^2e^x + A(x)xe^x + A(x)x^2e^x - (x+1)A(x)xe^x = x^2 - x^3, \text{ azaz}$$

$$A'(x) = e^{-x} - xe^{-x}, \text{ és így}$$

$$A(x) = \int e^{-x} - xe^{-x}\,dx = -e^{-x} + xe^{-x} - \int e^{-x}\,dx = xe^{-x} + c, \text{ tehát}$$

$$y = x^2 + cxe^x.$$

5. b) $P(x,y) = \ln y + ye^x + 2$, $Q(x,y) = \frac{x}{y} + e^x - \operatorname{ch} y$, $P_y = \frac{1}{y} + e^x$, $Q_x = \frac{1}{y} + e^x$. Mivel $P_y = Q_x$, a differenciálegyenlet egzakt, és a megoldása $u(x,y) = C$, ahol u a $(P(x,y), Q(x,y))$ vektor-vektorfüggvény egyik potenciálfüggvénye. $u_x = P$-ből $u = x\ln y + ye^x + 2x + g(y)$ valamely $g(y)$ függvényre, és $u_y = \frac{x}{y} + e^x + g'(y) = \frac{x}{y} + e^x - \operatorname{ch} y$, tehát $g(y) = -\operatorname{sh} y$, és ezzel $u(x,y) = x\ln y + ye^x + 2x - \operatorname{sh} y$ megfelelő. A differenciálegyenlet y megoldását az $x\ln y + ye^x + 2x - \operatorname{sh} y = C$ implicit egyenlet adja meg tetszőleges C konstanssal.

d) *1. megoldás:* $P(x,y) = y\sin x - 1$, $Q(x,y) = \cos x$, $P_y = \sin x$, $Q_x = -\sin x$, tehát az egyenlet nem egzakt. $\dfrac{P_y - Q_x}{Q} = \dfrac{2\sin x}{\cos x}$ csak x-től függ, tehát van $M(x)$ multiplikátor. Erre

$$\ln M(x) = \int \frac{2\sin x}{\cos x}\,dx = -2\ln(\cos x) + c = \ln\frac{1}{\cos^2 x} + c,$$

tehát $M(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ megfelelő. Ezzel végigszorozva az egyenletet:

$$y\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} + y'\frac{1}{\cos x} = 0,$$

ami már valóban egzakt. Az új egyenlethez tartozó $u(x,y)$ függvényre $u_x = y\dfrac{\sin x}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{\cos^2 x}$, és $u_y = \frac{1}{\cos x}$, aminek az egyik megoldása $u = \dfrac{y}{\cos x} - \operatorname{tg} x$, tehát a differenciálegyenlet y megoldása az $\dfrac{y}{\cos x} - \operatorname{tg} x = C$, azaz $y = \sin x + C\cos x$.

2. megoldás: A differenciálegyenlet lineáris, és a hozzá tartozó homogén lineáris $y'\cos x + y\sin x = 0$ differenciálegyenlet y megoldására $\ln|y| = \displaystyle\int -\frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \ln\cos x + C$, amiből $y = A\cos x$. Az inhomogén differenciálegyenlet megoldása $y = A(x)\cos x$ alakú, ahol $A'(x)\cos^2 x - A(x)\sin x\cos x + A(x)\cos x\sin x = 1$, azaz $A(x) = \displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + c$, és így $y = \sin x + c\cos x$.

e) A differenciálegyenlet nem egzakt, $\dfrac{P_y - Q_x}{Q} = \dfrac{4xy}{y(1-x^2)} = \dfrac{4x}{1-x^2}$ csak x-től függő, és így ad egy $M(x)$ multiplikátort, amelyre $\ln M(x) = \displaystyle\int \frac{4x}{1-x^2}\,dx = -2\ln(1 - x^2) + c = \ln\frac{1}{(1-x^2)^2} + c$, vagyis ($c = 0$-val) $M(x) = \dfrac{1}{(1-x^2)^2}$. Ezzel végigszorozva a differenciálegyenletet:

$$(y^2+1)\frac{x}{(1-x^2)^2} + \frac{y}{1-x^2}y' = 0.$$

Ennek az egzakt differenciálegyenletnek a megoldását annak az $u(x,y)$ függvénynek a segítségével tudjuk kifejezni, amelyre

$$u_x = (y^2+1)\frac{x}{(1-x^2)^2} \text{ és } u_y = \frac{y}{1-x^2}.$$

Ennek az egyik megoldása $u = \dfrac{1+y^2}{1-x^2}$, így a differenciálegyenlet y megoldására

$$\frac{1+y^2}{1-x^2} = C, \text{ azaz } y = \pm\sqrt{C(1-x^2)-1}.$$

f) A differenciálegyenlet egzakt, az $u_x = 2x + \cos y$, $u_y = -x\sin y$ feltételeket kielégítő egyik u függvény $x^2 + x\cos y$, tehát a differenciálegyenlet általános megoldása

$$x^2 + x\cos y = C.$$

Az $y(1) = 0$ feltétel $1+1 = C$ esetén teljesül ($x = 1$, $y = 0$-t helyettesítünk az egyenletbe), tehát $x^2 + x\cos y = 2$, azaz

$$y = \arccos\frac{2-x^2}{x}.$$

g) A differenciálegyenlet nem egzakt, $P_y = -e^{-y}$, $Q_x = e^{-y}$, és $\dfrac{P_y - Q_x}{Q} = \dfrac{-2e^{-y}}{xe^{-y} - 2ye^{-2y}} = \dfrac{-2}{x - 2ye^{-y}}$ nem csak x-től függ, tehát nincs $M(x)$ multiplikátor. Viszont $\dfrac{Q_x - P_y}{P} = \dfrac{2e^{-y}}{e^{-y}} = 2$ csak (legföljebb) y-tól függ, tehát $N(y)$ multiplikátor létezik: $\ln N(y) = \int 2\,dy = 2y + c$ miatt $N(y) = e^{2y}$ megfelel. A differenciálegyenletet ezzel végigszorozva az

$$e^y + (xe^y - 2y)y' = 0$$

egzakt differenciálegyenletet kapjuk. Ennek megoldását az $u(x,y) = xe^y - y^2$ függvényből az

$$xe^y - y^2 = C$$

implicit egyenlet adja.