1. Vezessük vissza elsőrendűre, és úgy oldjuk meg az alábbi hiányos másodrendű differenciálegyenleteket!

a) $xy'' - y' = x^2 \sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$
b) $2yy'' = (y')^2$
c) $2y'' + (y')^3 = 0$
d) $(x \ln x)y'' - y' = x \ln^2 x$
e) $y''(1+y^2) = y(y')^2, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1$

2. Oldjuk meg a következő állandó együtthatós, homogén, lineáris differenciálegyenleteket!

a) $y'' - 5y' + 6y = 0$
b) $y'' - 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$
c) $y'' + 4y = 0$
d) $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$

3. Írjuk fel az általános megoldását annak a homogén, lineáris differenciálegyenletnek, amelynek karakterisztikus egyenlete $m^2(m-1)^3(m^2+1)$. Melyik ez a differenciálegyenlet?

4. Milyen próbafüggvényt használnánk ahhoz az állandó együtthatós, inhomogén, lineáris differenciálegyenlethez, amelynek jobb oldalán a következő függvény áll? A karakterisztikus egyenlet milyen gyökei esetén kell még alkalmas x-hatvánnyal megszorozni a próbafüggvényt?

a) $5x^2 - 1$ b) $x \cos 3x$ c) $e^{2x} \sin x$

5. Oldjuk meg a következő inhomogén, lineáris differenciálegyenleteket!

a) $y'' + 2y' + y = \sin x$
b) $y'' + 2y' + y = xe^{-x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$
c) $y'' + y = -4 \cos x, \quad y(\pi) = 0, \quad y'(\pi) = \pi$
d) $y''' - y'' - 2y' = x^3 + e^x$

6. Ellenőrizzük, hogy a megadott függvények alaprendszerét alkotják a megadott lineáris differenciálegyenlethez tartozó homogén differenciálegyenletnek, és ezután oldjuk meg az inhomogént az állandók variálásának módszerével!

a) $xy'' + (x-1)y' - y = x^2, \quad y_1 = e^{-x}, \quad y_2 = x - 1$
b) $xy'' - \frac{6}{x}y = 6x^2, \quad y_1 = \frac{1}{x^2}, \quad y_2 = x^3$
c) $xy''' - y'' - xy' + y = x^2, \quad y_1 = x, \quad y_2 = \operatorname{ch} x, \quad y_3 = \operatorname{sh} x$

7. Oldjuk meg az alábbi Euler-féle differenciálegyenleteket!

a) $x^2y'' - 3xy' + y = 0$
b) $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^4 - x^2, \quad y(1) = \frac{1}{2}, y'(1) = 0$
c) $x^2y'' - 3xy' - 21y = -8x^5$
d) $xy''' + 2y'' = \dfrac{1}{x}$