Órai feladatok

1. Paraméterezzük azt a kúppalástot, amelynek alapja az $x^2+y^2=1$, $z=0$ egyenletekkel megadott kör, csúcsa pedig $A(1,2,3)$.

▷ *A kúppalástot lefedhetjük a csúcsot a kör pontjaival összekötő szakaszokkal. A kör egy tetszőleges pontja* $P(\cos u, \sin u, 0)$, *és az* AP *szakaszt* v*-vel paraméterezve a kúppalást tetszőleges pontjának helyvektorára az*
$\mathbf{r}(u,v)=\overrightarrow{OA}+v\overrightarrow{AP}=(1-v+v\cos u,\ 2-2v+v\sin u,\ 3-3v)$ *kifejezést kapjuk, ahol* $0\le u\le 2\pi$ *és* $0\le v\le 1$.

2. Írjuk fel a következő felületek érintősíkjának egyenletét a megadott pontban!
a) $\mathbf{r}=(uv,\ \frac{u}{v},\ \sqrt{u})$ az $(u,v)=(4,1)$ paraméterű pontban;
b) $x^3+xy^2+3yz^3=5$ az $(1,1,1)$ pontban.

▷ *a)* $\mathbf{r}_u=(v,\frac{1}{v},\frac{1}{2\sqrt{u}})$, $\mathbf{r}_v=(u,\ -\frac{u}{v^2},\ 0)$, *az adott pontban* $\mathbf{r}_u=(1,1,\frac{1}{4})$ *és* $\mathbf{r}_v=(4,-4,0)$. *Ebből a normálvektor* $(1,1,-8)$, *a megadott pont* $\mathbf{r}(4,1)=(4,4,2)$, *és az érintősík* $x+y-8z=-8$. *b) A felület a* $g(x,y,z)=x^3+xy^2+3yz^3$ *függvény nívóhalmaza, így normálvektora* $\mathbf{grad}\,g=(3x^2+y^2,\ 2xy+3z^3,\ 9yz^2)$, *ami az* $(1,1,1)$ *pontban* $(4,5,9)$, *és a sík egyenlete* $4x+5y+9z=18$.

3. Számítsuk ki az $\mathbf{r}(u,v)=(u^2,2u\cos v,2u\sin v)$, $0\le u\le 1$, $0\le v\le\frac{\pi}{2}$ felületdarab felszínét!

▷ $\int_0^{\pi/2}\int_0^1 |\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|\,du\,dv \int_0^{\pi/2}\int_0^1 4u\sqrt{1+u^2}\,du\,dv=\frac{4\sqrt{2}-2}{3}\pi.$

4. Számítsuk ki a $z-x$ skalárértékű függvény felületi integrálját az $\mathcal{F}:\ z=\sqrt{x^2+y^2}$, $0\le z\le 1$ kúpfelületen.

▷ $\mathbf{r}=(u\cos v,\ u\sin v,\ u)$, *ahol* $0\le u\le 1$ *és* $0\le v\le 2\pi$. $\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v=(-u\cos v,\ -u\sin v,\ u)$, $|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|=\sqrt{2}|u|=\sqrt{2}u$, *ha* $0\le u$, *és* $z-x=u-u\cos v$. *Az integrál* $\int_0^1\int_0^{2\pi}\sqrt{2}u^2-\sqrt{2}u^2\cos v\,dv\,du=\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$.

5. Számítsuk ki az $\mathbf{F}(\mathbf{r})=(x,-y,z)$ vektorértékű függvény felületmenti integrálját az $\mathcal{F}$: $\mathbf{r}(u,v)=(u+2v,v,u-v)$, $0\le u\le 3$, $0\le v\le 1$ felületen felfelé mutató normálvektorokkal.

▷ $\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v=(-1,3,1)$ *fölfelé mutató,* $\mathbf{F}(u,v)=(u+2v,\ -v,\ u-v)$, *és az integrál* $\int_0^1\int_0^3 -6v\,du\,dv=-9$.

Gyakorló feladatok

1. Paraméterezzük a $z=y^2$ görbe y körüli forgatásával kapott felületet!

2. Határozzuk meg az $\mathbf{r}(u,v)=(u,\cos u\sin v,\cos u\cos v)$ felület normálvektorát az $u_0=\frac{\pi}{4}$, $v_0=\frac{\pi}{3}$ paraméterértékekhez tartozó pontjában!

3. Adjuk meg az $xy^2+z^3=12$ felület érintősíkjának egyenletét a $P_0(1,2,2)$ pontban!

4. Számítsuk ki az $\mathbf{r}(u,v)=(\cos u-v\sin u,\sin u+v\cos u,u+v)$, $0\le u\le\pi$, $0\le v\le 1$ felületdarab felszínét!

5. Számítsuk ki a $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$ függvény integrálját, a $\mathcal{F}: \mathbf{r}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, 2)$, $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le \frac{\pi}{2}$ felületen.

Megoldások

1. $\mathbf{r}(y,\varphi) = (y^2\sin\varphi, y, y^2\cos\varphi)$, $y \in \mathbb{R}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

2. $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4})$

3. $\nabla(xy^2 + z^3 - 12) = (y^2, 2xy, 3z^2)$, így az érintősík normálvektora $(4,4,12)$, vagy az ezzel párhuzamos $(1,1,3)$, és a sík egyenlete $x + y + 3z = 9$.

4. $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (-v\sin u, v\cos u, -v)$, $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = v\sqrt{2}$, a felszín $\pi/\sqrt{2}$.

5. $\mathbf{r}_u = (\cos v, \sin v, 0)$, $\mathbf{r}_v = (-u\sin v, u\cos v, 0)$
$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (0,0,u)$, $\mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v)) = (u\cos v, u\sin v, 2)$,
$\mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) = 2u$
Ebből az integrál $\int_0^{\pi/2}\int_0^1 2u\,du\,dv = \frac{\pi}{2}$,