Órai feladatok

1. Számítsuk ki a Az $x^2+y^2+z^2=2$ gömbből a $z=\sqrt{x^2+y^2}$ kúp által kimetszett résznek a felszínét!

▷ *A kúp és a gömb metszete az $x^2+y^2=1$, $z=1$ kör, tehát a felületdarab vetülete az xy-síkra az $x^2+y^2\le 1$ kör. A $\iint \frac{|\nabla g|}{|(\nabla g)\mathbf{p}|}\,dA$ képletet használva, ahol $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, és $\mathbf{p}=(0,0,1)$ a vetület síkjának egységnyi normálvektora: $|\nabla g|=|(2x,2y,2z)|=2\sqrt{x^2+y^2+z^2}=2\sqrt{2}$ a gömbfelületen, $|(\nabla g)\mathbf{p}|=|2z|=2\sqrt{2-x^2-y^2}$, és a felszín $\iint_{x^2+y^2\le 1}\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2-x^2-y^2}}\,dx\,dy=\int_0^1\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-r^2}}r\,d\vartheta\,dr=(4-2\sqrt{2})\pi$. Másképp: a gömbsapka paraméterezése $\mathbf{r}(\varphi,\vartheta)=(\sqrt{2}\sin\varphi\cos\vartheta,\ \sqrt{2}\sin\varphi\sin\vartheta,\ \sqrt{2}\cos\varphi)$, ahol $0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$, $|\mathbf{r}_\varphi\times\mathbf{r}_\vartheta|=2\sin\varphi$, és a felszín $\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi}2\sin\varphi=(4-2\sqrt{2})\pi$.*

2. Számítsuk ki a következő vektor-vektorfüggvények divergenciáját és rotációját!

a) $\mathbf{F}(\mathbf{r})=\left(\dfrac{x}{y},\ \dfrac{y}{x},\ xz\right)$

b) $\mathbf{F}(\mathbf{r})=\mathbf{grad}\,|\mathbf{r}|$

▷ *a)* $\operatorname{div}\mathbf{F}(\mathbf{r})=\frac{1}{y}+\frac{1}{x}+x$ *és* $\mathbf{rot}\,\mathbf{F}(\mathbf{r})=\left(0,\ -z,\ -\frac{y}{x^2}+\frac{x}{y^2}\right)$. *b)* $\mathbf{grad}\,|\mathbf{r}|=\mathbf{grad}\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$,
amiből $\operatorname{div}\mathbf{F}=\frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}+\frac{x^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}+\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}=\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, *és* $\mathbf{rot}\,\mathbf{F}=\mathbf{0}$, *mert* $\mathbf{F}$ *egy függvény gradiense, tehát potenciálos, és potenciálos függvény rotációja* $\mathbf{0}$.

3. Bizonyítsuk be, hogy $\operatorname{div}(g\cdot\mathbf{F})=(\mathbf{grad}\,g)\cdot\mathbf{F}+g\cdot\operatorname{div}\mathbf{F}$.

▷ $\mathbf{F}=(P,Q,R)$*-re* $\operatorname{div}(g\mathbf{F})=\operatorname{div}(gP,\ gQ,\ gR)=g_xP+gP_x+g_yQ+gQ_y+g_zR+gR_z$, *és a jobb oldal is ezzel egyenlő.*

4. Lássuk be, hogy az $\mathbf{F}(\mathbf{r})=(2x+6xz,\ -2y,\ 3x^2-3z^2)$ vektormező forrásmentes és örvénymentes is!

▷ $\operatorname{div}\mathbf{F}=0$ *és* $\mathbf{rot}\,\mathbf{F}=\mathbf{0}$

5. Számítsuk ki az $\iint\limits_{\mathcal{F}}(xz,xy,yz)\mathbf{n}\,d\sigma$ integrált, ahol az $\mathcal{F}:\ z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ és a $z=0$ sík által határolt térbeli tartomány teljes felülete, befelé mutató normálvektorokkal.

▷ *Gauss–Osztrogradszkij-tétellel:* $\operatorname{div}\mathbf{F}=x+y+z$, *és az* $x^2+y^2+z^2\le 1$, $z\ge 0$ *félgömbtartományon kell integrálni. Gömbi koordinátákkal:* $\int\limits_0^1\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{2\pi}(\rho\sin\varphi\cos\vartheta+\rho\sin\varphi\sin\vartheta+\rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi\,d\vartheta\,d\varphi\,d\rho=\frac{\pi}{4}$. *Viszont a befelé mutató normálvektorok miatt az eredeti integrál ennek a negatívja:* $-\frac{\pi}{4}$.

6. A Stokes-tétel felhasználásával számítsuk ki az $\mathbf{F}(\mathbf{r})=(y^2,z^2,x^2)$ függvény integrálját az $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ és $C(0,0,1)$ pontokon, majd újra az A ponton keresztülhaladó zárt törtvonal mentén.

▷ $\mathbf{rot}\,\mathbf{F}=(-2z,-2x,-2y)$, *és ezt az* $x+y+z=1$ *síkon levő (tehát* $(1,1,1)$ *normálvektorú) felületdarabon kell integrálni. A felület vetülete az xy-síkra a* $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ *csúcsok által határolt* T *háromszögtaromány. Így az integrál*

$\iint\limits_T (-2(1-x-y), -2x, -2y)(1,1,1)/|(1,1,1)(0,0,1)|\,dy\,dx = \iint\limits_T -2\,dy\,dx = -2 \cdot \frac{1}{2} = -1$ *(mivel konstans függvényt kellett integrálni, elég volt a területtel megszorozni a függvényértéket).*

7. A Green-tétel segítségével számítsuk ki az $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (2x^2+2y^2,\ (x+y)^2)$ függvény integrálját az $A(1,1)$, $B(2,2)$ és $C(1,3)$ csúcsokon keresztülmenő zárt háromszögvonal mentén.

▷ *A* $\frac{\partial}{\partial x}(x+y)^2 - \frac{\partial}{\partial y}(2x^2+2y^2) = 2x - 2y$ *függvényt kell integrálni a háromszögtartományon:* $\int\limits_1^2 \int\limits_x^{4-x} 2x - 2y\,dy\,dx = -\frac{4}{3}$

Gyakorló feladatok

1. Számítsuk ki a divergenciát és a rotációt!
a) $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (x^2+y^3,\ 12xy - 3x,\ xyz^2)$
b) $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \times (1,1,1)$

2. Bizonyítsuk be, hogy $\operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\mathbf{rot}\,\mathbf{F})\mathbf{G} - \mathbf{F}(\mathbf{rot}\,G)$.

3. Számítsuk ki a z^2 függvény felületi integrálját az $x^2+y^2+z^2=4$, $z \geq 0$ félgömbfelületen.

4. Számítsuk ki az $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (xe^z,\ y^2,\ -2yz)$ függvény felületmenti integrálját a $z = x^2+y^2$ paraboloid és a $z=4$ sík által határolt korlátos tartomány teljes felületén, kifelé mutató normálvektorokkal.

5. Számítsuk ki Stokes-tétellel és anélkül a $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (x, x+y, x+y+z)$ függvény integrálját az $x^2+y^2=4$, $z=2$ egyenletekkel meghatározott körvonalon, pozitív irányban.

Megoldások

1. a) $\operatorname{div}\mathbf{F} = 2x + 12y + 2xyz$, $\mathbf{rot}\,\mathbf{F} = (xz^2,\ -yz^2,\ 12y - 3 - 3y^2)$
b) $\mathbf{F}(x,y,z) = (y-z, z-x, x-y)$, $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$, $\mathbf{rot}\,\mathbf{F} = (-2,-2,-2)$.

2. Legyen $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$, és $\mathbf{G} = (G_1, G_2, G_3)$ $\operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \operatorname{div}(F_2G_3 - F_3G_2,\ F_3G_1 - F_1G_3,\ F_1G_2 - F_2G_1) =$

$$\Big((F_2)_xG_3 + F_2(G_3)_x - (F_3)_xG_2 - F_3(G_2)_x\Big) +$$
$$\Big((F_3)_yG_1 + F_3(G_1)_y - (F_1)_yG_3 - F_1(G_3)_y\Big) +$$
$$\Big((F_1)_zG_2 + F_1(G_2)_z - (F_2)_zG_1 - F_2(G_1)_z\Big) =$$
$$\Big((F_3)_y - (F_2)_z\Big)G_1 + \Big((F_1)_z - (F_3)_x\Big)G_2 + \Big((F_2)_x - (F_1)_y\Big)G_3 +$$
$$F_1\Big((G_2)_z - (G_3)_y\Big) + F_2\Big((G_3)_x - (G_1)_z\Big) + F_3\Big((G_1)_y - (G_2)_x\Big) =$$
$$(\mathbf{rot}\,\mathbf{F})\mathbf{G} + \mathbf{F}(\mathbf{rot}\,\mathbf{G}).$$

3. $\nabla g = (2x, 2y, 2z)$, $|\nabla g| = 2\sqrt{x^2+y^2+z^2} = 4$ a felületen, míg az xy-sík $\mathbf{p} = (0,0,1)$ normálvektorával $\nabla g \cdot \mathbf{p} = 2z = 2\sqrt{4-x^2-y^2}$ a felületen, végül az integrálandó függvény $z^2 = 4 - x^2 - y^2$. Ebből az integrál $\iint_{x^2+y^2\leq 4}(4-x^2-y^2)\frac{4}{2\sqrt{4-x^2-y^2}}\,dx\,dy =$ $\iint_{x^2+y^2\leq 4} 2\sqrt{4-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^2 2\sqrt{4-r^2}\,r\,dr\,d\vartheta = \frac{32}{3}\pi.$

4. A Gauss–Osztrogradszkij-tétel szerint az integrál megegyezik $\operatorname{div}\mathbf{F} = e^z + 2y - 2y = e^z$ integráljával a paraboloid és a sík által határolt térbeli tartományon. A tartomány vetülete az xy-síkra a metszetkör vetülete, azaz az origó körüli 2 sugarú kör. Hengerkoordinátákkal felírva az integrált: $\int_0^2 \int_{r^2}^4 \int_0^{2\pi} e^z r \, d\vartheta \, dz \, dr = \int_0^2 \int_{r^2}^4 2\pi r e^z \, dz \, dr = \int_0^2 [2\pi r e^z]_{r^2}^4 \, dr =$
$\int_0^2 2\pi r e^4 - 2\pi r e^{r^2} \, dr = \left[\pi r^2 e^4 - \pi e^{r^2}\right]_0^2 = 3\pi e^4 + \pi.$

5. $\mathbf{r}(t) = (2\cos t,\ 2\sin t,\ 2)$, $\dot{\mathbf{r}}(t) = (-2\sin t,\ 2\cos t,\ 0)$,
$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = (2\cos t,\ 2\cos t + 2\sin t,\ 2 + 2\cos t + 2\sin t)$,
$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\dot{\mathbf{r}}(t) = 4\cos^2 t$,
$\int_{\mathcal{G}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \, \mathbf{dr} = \int_0^{2\pi} 4\cos^2 t \, dt = \int_0^{2\pi} 2 + 2\cos 2t \, dt = [2t + \sin 2t]_0^{2\pi} = 4\pi.$
vagy Stokes-tétellel:
$\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = (1, -1, 1)$,
és a sík $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, 2)$ paraméterezéséhez a normálvektor $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = (0, 0, 1)$, a paramétertartomány pedig $x^2 + y^2 \le 4$
$\iint_{\mathcal{F}} (1, -1, 1)(0, 0, 1) \, d\sigma = \iint_{\mathcal{F}} 1 \, d\sigma$, ez pedig az $x^2 + y^2 \le 4$ kör területe, azaz 4π.