Órai feladatok

1. Írjuk fel az $f(z) = z^2 + \frac{1}{z}$ függvényt $f(x+yi) = u(x,y) + iv(x,y)$ alakban.

▷ $z^2 + \frac{1}{z} = (x+yi)^2 + \frac{1}{x+yi} = x^2 - y^2 + 2xyi + \frac{x-yi}{x^2+y^2} = (x^2 - y^2 + \frac{x}{x^2+y^2} + i(2xy - \frac{y}{x^2+y^2})$

2. Adjuk meg algebrai alakban a következő komplex függvényértékeket!

a) $e^{5+\frac{\pi}{2}i}$ b) $e^{1-i\arcsin(1/3)}$ c) $\mathrm{ch}(\ln 3 + i\frac{\pi}{4})$ d) $\sin(1+i)$

▷ *a)* $e^{5+\frac{\pi}{2}i} = e^5 \cdot e^{\frac{\pi}{2}i} = e^5(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = e^5 i$

b) $e^{1-i\arcsin(1/3)} = e(\cos(-\arcsin(1/3)) + i\sin(-\arcsin(1/3))) = e\left(\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} - \frac{1}{3}i\right) =$
$$\frac{2\sqrt{2}e}{3} - \frac{e}{3}i.$$

c) $\mathrm{ch}(\ln 3 + i\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}(e^{\ln 3 + i(\pi/4)} + e^{-\ln 3 - i(\pi/4)}) = \frac{1}{2}(3(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)) + \frac{1}{3}(\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4))) = \frac{5\sqrt{2}}{6} + \frac{2\sqrt{2}}{3}i.$

d) $\sin(1+i) = \sin 1 \cos i + \cos 1 \sin i = \sin 1\,\mathrm{ch}\,1 + i\cos 1\,\mathrm{sh}\,1$

3. Adjuk meg az $\ln(-5+5i)$ szám összes logaritmusát, és a logaritmus főértékét!

▷ $-5+5i = 5\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$, *így a logaritmusa* $\ln(5\sqrt{2}) + i(\frac{3}{4}\pi + 2k\pi)$, *a logaritmus főértéke pedig* $\ln(5\sqrt{2}) + \frac{3}{4}\pi i$.

Gyakorló feladatok

1. Írjuk fel az $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$ függvényt $f(x+yi) = u(x,y) + iv(x,y)$ alakban.

2. Adjuk meg algebrai alakban a következő komplex függvényértékeket!

a) $\mathrm{sh}(1 - \frac{\pi}{3}i)$ b) $\cos(-i)$ c) $\mathrm{tg}\,\frac{i\pi}{2}$

3. Adjuk meg a következő komplex számok összes logaritmusát, és a logaritmus főértékét!

a) $\ln(-e)$. b) $\ln(\sqrt{3}+i)$

Megoldások

1. $$f(x+yi) = \frac{x+yi+1}{x+yi-1} = \frac{x+1+yi}{x-1+yi} = \frac{(x+1+yi)(x-1-yi)}{(x-1)^2+y^2} = \frac{x^2+y^2-1-2yi}{(x-1)^2+y^2} = \frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2} + i\frac{-2y}{(x-1)^2+y^2}.$$

2. a) $\mathrm{sh}(1-\frac{\pi}{3}i) = \frac{1}{2}(e^{1-(\pi/3)i} + e^{-1+(\pi/3)i}) = \frac{1}{2}(e(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) + \frac{1}{e}(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})) = \frac{1}{4}(e - \frac{1}{e}) - \frac{\sqrt{3}}{4}(e + \frac{1}{e})i.$

b) $\cos(-i) = \mathrm{ch}(-1) = \frac{1}{2}(e + \frac{1}{e})$

c) $$\mathrm{tg}\,\frac{i\pi}{2} = \frac{\sin\frac{i\pi}{2}}{\cos\frac{i\pi}{2}} = \frac{i\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi}{2}}{\mathrm{ch}\,\frac{\pi}{2}} = i\mathrm{th}\,\frac{\pi}{2}$$

3. a) A $-e$ szám trigonometrikus alakja $e(\cos\pi + i\sin\pi)$, így $\ln(-e) = \ln e + i(\pi + 2k\pi)i = 1 + (2k+1)\pi i$, a logaritmus főértéke pedig $1 + \pi i$.

b) $\sqrt{3} + i = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$, így $\ln(\sqrt{3}+i) = \ln 2 + i(\frac{\pi}{6} + 2k\pi)$, a logaritmus főértéke pedig $\ln 2 + i\frac{\pi}{6}$.