Órai feladatok

1. Keressük meg a $\sin z = -2$ egyenlet összes megoldását a komplex számok körében!

▷ *Felhasználva a* $\sin z = \mathrm{sh}(iz)/i = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ *összefüggést, és az egyenletet* ie^z*-vel beszorozva és 0-ra rendezve azt kapjuk, hogy* $(e^{iz})^2+4ie^{iz}-1=0$*, tehát* $e^{iz} = \frac{-4i\pm\sqrt{-12}}{2} = (-2\pm\sqrt{3})i$*. Ennek az abszolútértéke* $2\mp\sqrt{3}$*, és így a trigonometrikus alakja* $(2\mp\sqrt{3})(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2})$*, a logaritmusa* $iz = \ln(2\mp\sqrt{3}) + i(\frac{3}{2}\pi+2k\pi)$*, tehát* $z = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi - i\ln(2\mp\sqrt{3})$*.*

2. Számítsuk ki az $(i+1)^i$ hatvány értékeit!

▷ $(i+1)^i = e^{i\ln(i+1)}$*, ahol* $\ln(i+1) = \ln(\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})) = \ln\sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4}+2k\pi) = \frac{\ln 2}{2} + i(\frac{\pi}{4}+2k\pi)$*, tehát* $(i+1)^i = e^{-(\frac{\pi}{4}+2k\pi)+i(\ln 2)/2} = e^{-(\frac{\pi}{4}+2k\pi)}(\cos\frac{\ln 2}{2}+i\sin\frac{\ln 2}{2})$*.*

3. Differenciálhatók-e valahol az $f(x) = |z|^2$ komplex függvény? Ahol differenciálható, ott adjuk is meg a deriváltat!

▷ $f(x+yi) = |x+yi|^2 = x^2+y^2$ *(ahol* $x,y\in\mathbb{R}$*), tehát* $u(x,y) = x^2+y^2$ *és* $v(x,y)=0$*. A Cauchy–Riemann-differenciálegyenletek szerint* $2x = u_x = v_y = 0$*, és* $2y = u_y = -y_x = 0$*, ahol* f *differenciálható, tehát csak a* $0+0i=0$ *helyen differenciálható a függvény, és ott a deriváltja* $u_x+iv_x = 0$*.*

4. Határozzuk meg azt a reguláris $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$ függvényt, amelyre $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$.

▷ $v_x = -u_y = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$*, és* $v_y = u_x = \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2)^2}$*.* $v(x,y)$ *a* (v_x,v_y) *vektor-vektorfüggvény potenciálfüggvénye, tehát* $v(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}+C$*. Ebből*

$$f(z) = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} + Ci = \frac{\bar{z}}{|z|^2} + Ci = \frac{\bar{z}}{\bar{z}z} + Ci = \frac{1}{z} + Ci$$

5. Számítsuk ki az $f(z)$ függvény integrálját a megadott $\mathcal{G}$ görbe mentén:

a) $f(z) = \mathrm{Re}(z+z^2)$, $\mathcal{G}$ a $y=x^2$ $(0\le x\le 1)$ egyenletű parabola a komplex síkon, és az irány az x növekedésének iránya;

b) $f(z) = 3z^2+2z$, $\mathcal{G}$ az $1-i$, $2-i$, $2+i$ pontokat összekötő törtvonal.

c) $f(z) = iz^2-2\bar{z}$, $\mathcal{G}:\ |z|=2$, $\mathrm{Re}\,z\ge 0$, $\mathrm{Im}\,z\ge 0$, a kör negatív irányítása szerint.

▷ *a)* $z(t) = t+it^2$*, ahol* $0\le t\le 1$*.* $z'(t) = 1+2ti$*,* $f(z(t)) = t+t^2-t^4$*, és* $\int_{\mathcal{G}} f(z)\,dz = \int_0^1 (t+t^2-t^4)+2i(t^2+t^3-t^5)\,dt = \frac{19}{30}+\frac{5}{6}i$*.*

b) f*-nek van primitív függvénye,* z^3+z^2*, így* $\int_{\mathcal{G}} f(z)\,dz = \left[z^3+z^2\right]_{1-i}^{2+i} = 7+19i$*.*

c) $z(t) = 2e^{it}$ *(*$\frac{\pi}{2}\ge t\ge 0$*),* $z'(t) = 2ie^{it}$*,* $f(z(t)) = 4ie^{2it}-4e^{-it}$*,* $\int_{\mathcal{G}} f(z)\,dz = \int_{\pi/2}^0 -8e^{3it}-8i\,dt = -\frac{8}{3}+(\frac{8}{3}-4\pi)i$*.*

Gyakorló feladatok

1. Oldjuk meg az egyenleteket a komplex számok körében!

a) $\mathrm{tg}\,z = -i$ b) $\cos z = i\sqrt{3}$

2. Számítsuk ki a következő hatványokat!

a) i^i b) 2^{5i} c) $i^{1/2}$

3. Hol differenciálható a $\cos\bar{z}$ függvény?

4. Határozzuk meg azt a reguláris $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ függvényt, amelyre $v(x,y) = 2y(x+1)$ és $f(i) = 2i - 1$.

5. Számítsuk ki az $f(z) = \dfrac{z+2}{z}$ függvény integrálját a $|z| = 2$, $\operatorname{Im} z \le 0$ körív mentén, pozitív forgásiránnyal;

Megoldások

1. a) $\operatorname{tg} z = \dfrac{\sin z}{\cos z} = \dfrac{-i\operatorname{sh}(iz)}{\operatorname{ch}(iz)} = -i\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}$, így a $\operatorname{tg} z = -i$ egyenlet $e^{iz} - e^{-iz} = e^{iz} + e^{-iz}$ alakra hozható, ami az $e^{-iz} = 0$ egyenlettel ekvivalens, és ennek nincs megoldása.

b) $\cos z = i\sqrt{3} \Leftrightarrow \operatorname{ch} iz = i\sqrt{3} \Leftrightarrow e^{iz} + e^{-iz} = i2\sqrt{3} \Leftrightarrow (e^{iz})^2 - i2\sqrt{3}e^{iz} + 1 = 0$. Ebből $e^{iz} = \dfrac{i2\sqrt{3} \pm \sqrt{-12-4}}{2} = i\sqrt{3} \pm 2i = i(\sqrt{3} \pm 2)$. Az első megoldás trigonometrikus alakja $(2+\sqrt{3})(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$, amiből $iz = \ln(2+\sqrt{3}) + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$, és $z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln(2+\sqrt{3})$, a másodiké $(2-\sqrt{3})(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2}))$, amiből $iz = \ln(2-\sqrt{3}) + i(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$, és így $z = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln(2-\sqrt{3})$.

2. a) $i^i = e^{i\ln i}$, ahol $\ln i = \ln(1\cdot(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})) = 0 + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$, és így $i^i = e^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}$. (A hatvány főértéke ott van, ahol a logaritmus főértékét vesszük, tehát i^i főértéke $e^{-\frac{\pi}{2}}$.

b) $2^{5i} = e^{5i\ln 2}$, ahol $\ln 2$-t mint komplex logaritmust értjük (tehát végtelen sok különböző értéke van): $\ln 2 + 2k\pi i$ (és itt már $\ln 2$ a valós logaritmust jelenti). Tehát $2^{5i} = e^{-10k\pi + i5\ln 2} = e^{-10k\pi}(\cos(5\ln 2) + i\sin(5\ln 2))$.

c) $i^{1/2} = e^{(1/2)\ln i} = e^{(i/2)(\frac{\pi}{2}+2k\pi)} = e^{i(\frac{\pi}{4}+k\pi)} = \cos(\frac{\pi}{4} + k\pi) + i\sin(\frac{\pi}{4} + k\pi) = \pm(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i)$. (Ez természetesen megegyezik az i két négyzetgyökével, mert a hatványazonosságok érvényessége miatt az $\frac{1}{n}$-edik hatvány a komplex számoknál is az n-edik gyököket jelenti.)

3. $\cos(\overline{x+yi}) = \cos(x - yi) = \cos x\cos(yi) + \sin x\sin(yi) = \cos x\operatorname{ch} y + i\sin x\operatorname{sh} y = u(x,y) + iv(x,y)$. A kapott $u(x,y) = \cos x\operatorname{ch} y$ és $v(x,y) = \sin x\operatorname{sh} y$ kétváltozós függvények mindegyike differenciálható. A Cauchy–Riemann-differenciálegyenletek szerint az$f$ függvény differenciálhatósághoz az kell még, hogy $u_x = v_y$ és $u_y = -v_x$ legyen. $u_x = -\sin x\operatorname{ch} y$, $v_y = \sin x\operatorname{ch} y$, $u_y = \cos x\operatorname{sh} y$, és $v_x = \cos x\operatorname{sh} y$, tehát a két egyenlet csak akkor teljesülhet egyszerre, ha $\sin x\operatorname{ch} y = \cos x\operatorname{sh} y = 0$. De $\operatorname{ch} y \ge 1$ minden y-ra, tehát $\sin x = 0$, azaz $x = k\pi$ valamely $k \in \mathbb{Z}$-re, és a második egyenletből $\operatorname{sh} y = 0$ miatt $y = 0$. Így a függvény a $z = k\pi$ helyeken differenciálható, és itt a deriváltja $u_x + iv_x = 0$.

4. $u_x = v_y = 2(x+1)$, és $u_y = -v_x = -2y$. Így $u(x,y) = \int 2(x+1)\,dx = (x+1)^2 + g(y)$, amiből $u_y = g'(y) = -2y$, tehát $g(y) = -y^2 + C$, és $u(x,y) = (x+1)^2 - y^2 + C$, és $f(x+yi) = (x+1)^2 - y^2 + C + 2y(x+1)i$. Az $f(i) = 2i - 1$ feltétel miatt $2i - 1 = 1 - 1 + C + 2i$, tehát $C = -1$, és $f(x+yi) = (x+1)^2 - y^2 + 2y(x+1)i - 1$. (A függvényt kifejezhetjük z-vel is: $f(z) = x^2 - y^2 + 2xyi + 2x + 2yi = z^2 + 2z$.)

5. $z(t) = 2e^{it}$ $(\pi \le t \le 2t)$, $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \frac{2e^{it}+2}{2e^{it}}(2ie^{it})\,dt = \int_{\pi}^{2\pi} 2ie^{it} + 2i\,dt = \left[2e^{it} + 2it\right]_{\pi}^{2\pi} = 2e^{2\pi i} - 2e^{\pi i} + 2\pi i = 2 - (-2) + 2\pi = 4 + 2\pi i.$