Órai feladatok

1. A Cauchy-féle integrálformula segítségével számítsuk ki a következő integrálokat:

a) $\displaystyle\oint_{\mathcal{G}} \frac{\cos z}{z^2+iz}\,dz$, ahol $\mathcal{G}$ a $-i$ középpontú, $\frac{1}{2}$ sugarú kör, pozitív körüljárással;

b) $\displaystyle\oint_{\mathcal{G}} \frac{\operatorname{ch} z}{z^5}\,dz$, ahol $\mathcal{G}$ egy origó középpontú kör, negatív körüljárással;

c) $\displaystyle\oint_{\mathcal{G}} \frac{e^z}{z^4-z^3}\,dz$, ahol$\mathcal{G}$ a $|z-2|=3$ egyenletű kör, pozitív irányban;

d) $\displaystyle\oint_{\mathcal{G}} \frac{e^{\pi z}}{(z-i)^2(z+1)}\,dz$, ahol $\mathcal{G}$ a $-2, 1+2i, 1-2i$ csúcsú háromszögvonal.

▷ *a) Az integrandus szingularitásai* 0 *és* $-i$, *ezek közül csak* $-i$ *van a kör belsejében. Így az integrál a Cauchy-féle integrálformula szerint* $\oint_{\mathcal{G}} \frac{\frac{\cos z}{z}}{z+i}\,dz = \frac{2\pi i}{0!}\frac{\cos z}{z}\Big|_{z=-i} = -2\pi \operatorname{ch} 1.$

b) Negatív a körüljárás, így az integrál $-\frac{2\pi i}{4!}(\operatorname{ch} z)^{(4)}\Big|_{z=0} = -\frac{\pi}{12}i$

c) Az integrandus szingularitásai 0 *és* 1, *mindkettő a kör belsejében van. Legyen* $\mathcal{G}_0$ *és* $\mathcal{G}_1$ *a két szingularitást körüljáró, a* $\mathcal{G}$ *belsejében levő, egymást nem metsző két kör, a* $\mathcal{G}$*-vel megegyező, tehát pozitív irányítással.* $\oint_{\mathcal{G}_0} \frac{e^z}{z^3(z-1)}\,dz = \oint_{\mathcal{G}_0} \frac{\frac{e^z}{z-1}}{z^3}\,dz = \frac{2\pi i}{2!}\left(\frac{e^z}{z-1}\right)''\Big|_{z=0} = \frac{2\pi i}{2!}\frac{e^z(z-1)^2-2e^z(z-2)}{(z-1)^3}\Big|_{z=0} = -5\pi i,$ $\oint_{\mathcal{G}_1} \frac{e^z}{z^3(z-1)}\,dz = \oint_{\mathcal{G}_1} \frac{\frac{e^z}{z^3}}{z-1}\,dz = \frac{2\pi i}{0!}\frac{e^z}{z^3}\Big|_{z=1} = 2\pi e i.$ *Összesítve* $\oint_{\mathcal{G}} f(z)\,dz = (2\pi e - 2\pi)i.$

d) Az integrandus szingularitásai i *és* -1, *mindkettő benne van a megadott (negatív irányítású) háromszögtartományban. Legyen* $\mathcal{G}_i$ *egy* i *körüli,* $\mathcal{G}_{-1}$ *egy* -1 *körüli negatív irányítású kis kör.*

$$\oint_{\mathcal{G}_i} \frac{e^{\pi z}}{(z-i)^2(z+1)}\,dz = \oint_{\mathcal{G}_i} \frac{\frac{e^{\pi z}}{z+1}}{(z-i)^2}\,dz = -\frac{2\pi i}{1!}\left(\frac{e^{\pi z}}{z+1}\right)'\Big|_i = -2\pi i\frac{\pi e^{\pi z}(z+1)-e^{\pi z}}{(z+1)^2}\Big|_i = -2\pi i\frac{-\pi(1+i)+1}{(1+i)^2} = (\pi^2-\pi)+\pi^2 i.$$

$$\oint_{\mathcal{G}_{-1}} \frac{e^{\pi z}}{(z-i)^2(z+1)}\,dz = \oint_{\mathcal{G}_{-1}} \frac{\frac{e^{\pi z}}{(z-i)^2}}{z+1}\,dz = -\frac{2\pi i}{0!}\frac{e^{\pi z}}{(z-i)^2}\Big|_{-1} = -\pi e^{-\pi}.$$

Így $\mathcal{G}$*-n az integrál* $(\pi^2-\pi-\pi e^{-\pi})+\pi^2 i.$

2. Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenletek típusát (explicit-e vagy implicit, milyen rendű, illetve fokú, homogén vagy inhomogén)!

a) $y' = 3y''' - (\operatorname{tg} x)y' + \operatorname{ch} x$ b) $y'' = e^y \ln x$ c) $y'' = y^2 y' \cos x$

▷ *a) Implicit, harmadrendű, elsőfokú, inhomogén.*
b) Explicit, másodrendű, nincs foka.
c) Explicit, másodrendű, harmadfokú, homogén.

3. Oldjuk meg a következő (szétválasztható) differenciálegyenleteket, illetve kezdetiérték-problémákat!

a) $xyy' + y^2 - 1 = 0$

b) $(2x+1)y' - 3y = 0, \;\; y(4) = 6$

▷ *a) A differenciálegyenlet $y \not\equiv \pm 1$ esetén $\frac{y'y}{y^2-1} = -\frac{1}{x}$ alakra hozható, amiből integrálással $\frac{1}{2}\ln|y^2-1| = -\ln|x| + C$. Ezt tovább alakítva $\ln\sqrt{|y^2-1|} = \ln\frac{e^C}{|x|}$, azaz $y^2 - 1 = \pm\frac{e^{2C}}{x^2}$, vagyis $y = \pm\sqrt{1+\frac{A}{x^2}}$, ahol $A \in \mathbb{R}$ tetszőleges választása a korábban talált $y \equiv \pm 1$ esetet is magában foglalja.*
b) Ha $y \not\equiv 0$, akkor a differenciálegyenlet $\frac{y'}{y} = \frac{3}{2x+1}$ alakra hozható. Ebből $\ln|y| = \frac{3}{2}\ln|2x+1| + C$, tehát $y = A|2x+1|^{3/2}$ ($A \in \mathbb{R}$ tetszőleges). A kezdeti feltételt az $A = \frac{2}{9}$ paraméter elégíti ki, és $x = 4$ közelében $2x+1 > 0$, így a megoldás $y = \frac{2}{9}(2x+1)^{3/2}$.

Gyakorló feladatok

1. A Cauchy-féle integrálformula segítségével számítsuk ki a következő integrálokat:

a) $\displaystyle\oint_{\mathcal{G}} \frac{1}{z(z^2-1)}\,dz$, ahol $\mathcal{G}: \; |z-1| = \frac{3}{2}$, pozitív irányban;

b) $\displaystyle\oint_{\mathcal{G}} \frac{1}{1+z^2}\,dz$, ahol $\mathcal{G}$ a $|z| = 2$ egyenletű kör, pozitív irányban;

c) $\displaystyle\oint_{\mathcal{G}} \frac{\sin z}{(z-\frac{\pi i}{2})^3}\,dz$, ahol $\mathcal{G}$ a $|z-1| + |z+1| = 4$ egyenletű ellipszis, pozitív irányban.

2. Oldjuk meg a következő (szétválasztható) differenciálegyenleteket, illetve kezdetiérték-problémákat!

a) $(1+x^2)y' + x(1+y^2) = 0$

b) $\sqrt{1-x^2}y' + xy = 0$ az $y(\frac{1}{2}) = 0$, illetve az $y(\frac{3}{5}) = 1$ kezdeti feltétellel

Megoldások

1. a) Az integrandus szingularitásai $0, \pm 1$ (a nevező $z(z-1)(z+1)$, a számláló pedig reguláris), és ezek közül 0 és 1 vannak a körön belül, tehát az integrált helyettesíthetjük egy 0 körüli ($\mathcal{G}_0$) és egy 1 körüli ($\mathcal{G}_1$) kis körön vett integrál összegével.

$$\oint_{\mathcal{G}_0} \frac{1}{z(z^2-1)}\,dz = \oint_{\mathcal{G}_0} \frac{\frac{1}{z^2-1}}{z}\,dz = \frac{2\pi i}{0!}\frac{1}{z^2-1}\Big|_{z=0} = -2\pi i.$$

$$\oint_{\mathcal{G}_1} \frac{1}{z(z^2-1)}\,dz = \oint_{\mathcal{G}_0} \frac{\frac{1}{z^2+z}}{z-1}\,dz = \frac{2\pi i}{0!}\frac{1}{z^2+z}\Big|_{z=1} = \pi i.$$

Így a $\mathcal{G}$ körön vett integrál $-2\pi i + \pi i = -\pi i$.

b) Az integrandus szingularitásai $\pm i$ (a nevező $z^2+1 = (z+i)(z-i)$, a számláló reguláris), és mindkettő benne van a görbe által bezárt tartományban. Legyen $\mathcal{G}_i$ egy i körüli, $\mathcal{G}_{-i}$ egy $-i$ körüli kis kör.

$$\oint_{\mathcal{G}_i} \frac{1}{(z+i)(z-i)}\,dz = \oint_{\mathcal{G}_i} \frac{\frac{1}{z+i}}{z-i}\,dz = \frac{2\pi i}{0!}\frac{1}{z+i}\Big|_i = \pi.$$

$$\oint_{\mathcal{G}_i} \frac{1}{(z+i)(z-i)}\,dz = \oint_{\mathcal{G}_i} \frac{\frac{1}{z-i}}{z+i}\,dz = \frac{2\pi i}{0!}\,\frac{1}{z-i}\bigg|_i = -\pi.$$

Így a $\mathcal{G}$-n az integrál 0.

c) Az integrandus egyetlen szingularitása $\frac{\pi i}{2}$, és ez az ellipszis belsejébe esik, mert $|-1+\frac{\pi i}{2}| + |1+\frac{\pi i}{2}| = 2\sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}} < 4$. $\oint_{\mathcal{G}} \frac{\sin z}{(z-\frac{\pi i}{2})^3}\,dz = \frac{2\pi i}{2!}(\sin z)''\Big|_{\pi i/2} = \pi i(-\sin z)\Big|_{\pi i/2} = -\pi i \sin\frac{\pi i}{2} = \pi\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi}{2}$.

2. a)

$$\frac{y'}{1+y^2} = -\frac{x}{1+x^2}$$

$$\int \frac{1}{1+y^2}\,dy = \int -\frac{x}{1+x^2}\,dx$$

$$\mathrm{arctg}(y) = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

$$y = \mathrm{tg}\left(-\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C\right) = \mathrm{tg}\,\frac{A}{\sqrt{1+x^2}},$$

ahol $A = e^C > 0$.

b)

$$\frac{y'}{y} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \text{ vagy } y \equiv 0$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \qquad ,$$

$$\ln|y| = \sqrt{1-x^2} + C$$

$$y = Ae^{\sqrt{1-x^2}}$$

ahol $A = \pm e^C$ tetszőleges nem 0 szám, vagy $A = 0$ a szinguláris megoldás miatt. Az $y(\frac{1}{2}) = 0$ kezdeti feltételt az $y \equiv 0$ megoldás, az $y(\frac{3}{5}) = 1$ kezdeti feltételt az $y = e^{-4/5}e^{\sqrt{1-x^2}}$ megoldás elégíti ki.