## Órai feladatok

**1.** Ha a differenciálegyenlet $y' = g(y/x)$ alakra hozható, akkor $z = y/x$ függvény bevezetésével szétválaszthatóvá tehető. Oldjuk meg ennek segítségével az $2xyy' = y^2 - x^2$, $y(1) = 1$ kezdetiérték-problémát!

▷ *$xy$-nal leosztva $2y' = (y/x) - \frac{1}{(y/x)}$, tehát a differenciálegyenlet $y' = g(y/x)$ alakra hozható. $z = (y/x)$ (azaz $y = zx$) helyettesítésnél $y' = z'x + z$, és így a $2z'x + 2z = z + \frac{1}{z}$ differenciálegyenlethez jutunk, amely szétválasztható, és a megoldása $z = \sqrt{\frac{A}{x} - 1}$, ahol $A \neq 0$, és ebből $y = x\sqrt{\frac{A}{x} - 1}$. Az $y(1) = 1$ kezdeti feltételt $A = 2$-vel elégíti ki a megoldás, tehát a keresett függvény $y = x\sqrt{\frac{2}{x} - 1}$.*

**2.** Oldjuk meg a következő elsőrendű lineáris differenciálegyenleteket!

a) $y' - \dfrac{1}{x}y = x^2$

b) $y' + y = e^{-x}$

▷ *a) Állandók variálásával: A homogén (szétválasztható) $y' - \frac{1}{x}y = 0$ differenciálegyenlet megoldása $y = Ax$, tehát az eredeti egyenlet megoldását $y = A(x)y$ alakban keressük. Ezt behelyettesítva a differenciálegyenletbe azt kapjuk, hogy $A'(x)x + A(x) - A(x) = x^2$, amiből $A(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$, tehát $y = \frac{1}{2}x^3 + Cx$.*

*Másik megoldás: Az $y' + p(x)y = q(x)$ egyenletet $e^{P(x)}$-szel (ahol $P(x)$ az $p(x)$ primitív függvénye) beszorozzuk, és így a bal oldalon az $ye^{P(x)}$ deriváltját kapjuk. Ebben az esetben $e^P(x) = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$, és így $(y\frac{1}{x})' = x$, amiből $y\frac{1}{x} = \frac{1}{2}x^2 + C$, tehát $y = \frac{1}{2}x^3 + Cx$.*

*b) Az a) részben említettek közül a második módszer szerint $e^x$-szel szorozzuk be az egyenletet: $(e^x y)' = 1$, amiből $e^x y = x + C$, tehát $y = xe^{-x} + Ce^{-x}$.*

**3.** Melyek egzaktak az alábbi differenciálegyenletek közül? A nem egzaktakhoz keressünk egyváltozós multiplikátort, és úgy oldjuk meg!

a) $x^3 - 3xy^2 + (y^2 - 3x^2y)y' = 0$, $y(1) = 1$

b) $(1 - xy) + (xy - x^2)y' = 0$

c) $\ln y + ye^x + 2 + (\frac{x}{y} + e^x - \operatorname{ch} y)y' = 0$

▷ *a) $P(x,y) = x^3 - 3xy^2$ és $Q(x,y) = y^2 - 3x^2y$ kétváltozós függvényekkel $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ alakú. $P_y = Q_x = 6xy$, így a differenciálegyenlet egzakt, azaz $(P,Q)$-nak mint $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ függvénynek van potenciálfüggvénye. Az egyik potenciálfüggvény $u(x,y) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{1}{3}y^3$, így a differenciálegyenlet megoldása az $u(x,y) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{1}{3}y^3 = C$ implicit egyenlettel megadott $y$ valamely $C$ konstansra. A kezdeti feltétel miatt $C = -\frac{11}{12}$.*

*b) Nem egzakt: $P_y = -x$ és $Q_x = y - 2x$. Viszont $\dfrac{P_y - Q_x}{Q} = \dfrac{x - y}{xy - x^2} = -\dfrac{1}{x}$ csak $x$-től függ, ezért van $x$-től függő $M(x)$ multiplikátor, amelyre $\ln M(x) = \int -\frac{1}{x}\,dx = -\ln|x| + C = \ln(\frac{1}{|x|}) + C$, speciálisan $M(x) = \frac{1}{x}$ megfelel. Valóban, az $\dfrac{1}{x} - y + (y - x)y' = 0$ differenciálegyenlet egzakt, $u(x,y) = \ln|x| - xy + \frac{1}{2}y^2$ potenciálfüggvénye az $(\frac{1}{x} - y,\ y - x)$ vektor-vektorfüggvénynek, és így $\ln x - xy + \frac{1}{2}y^2 = C$, illetve $\ln(-x) - xy + \frac{1}{2}y^2 = C$ a differenciálegyenlet $y$ megoldását megadó egyenlet attól függően, hogy pozitív $x$-eken vagy negatív $x$-eken értelmezett megoldást keresünk.*

*c) Egzakt: $P_y = Q_x = \frac{1}{y} + e^x$. A megoldása $u(x,y) = C$, ahol $u$ a $(P(x,y), Q(x,y))$ vektor-vektorfüggvény egyik potenciálfüggvénye. $u_x = P$-ből $u = x\ln y + ye^x + 2x + g(y)$*

*valamely $g(y)$ függvényre, és $u_y = \frac{x}{y} + e^x + g'(y) = \frac{x}{y} + e^x - \operatorname{ch} y$, tehát $g(y) = -\operatorname{sh} y$, és ezzel $u(x,y) = x\ln y + ye^x + 2x - \operatorname{sh} y$ megfelelő. A differenciálegyenlet $y$ megoldását az $x\ln y + ye^x + 2x - \operatorname{sh} y = C$ implicit egyenlet adja meg tetszőleges $C$ konstanssal.*

## Gyakorló feladatok

**1.** Vezessük vissza szétválasztható differenciálegyenletre, és így oldjuk meg a $xy' = xe^{y/x} + y$, $y(1) = 0$ kezdetiérték-problémát!

**2.** Oldjuk meg a következő elsőrendű lineáris differenciálegyenleteket!

a) $y' + y\cos x = \sin x \cos x$, $y(0) = 1$
b) $xy' - (x+1)y = x^2 - x^3$

**3.** Melyek egzaktak az alábbi differenciálegyenletek közül? Oldjuk meg mindegyiket!

a) $(y\sin x - 1) + y'\cos x = 0$
b) $x(y^2+1) + y(1-x^2)y' = 0$
c) $2x + \cos y - (x\sin y)y' = 0$, $y(1) = 0$

## Megoldások

**1.** A differenciálegyenlet $y' = e^{y/x} + \frac{y}{x}$ alakra hozható. $z = y/x$, azaz $y = zx$ helyettesítésnél $y' = z'x + z$.

$$\begin{aligned} z'x + z &= e^z + z \\ z'e^{-z} &= \frac{1}{x} \\ \int e^{-z}\,dz &= \int \frac{1}{x}\,dx \\ -e^{-z} &= \ln|x| + C \\ z &= -\ln(-\ln|x| - C)) \end{aligned}$$

Mivel az $x = 1$ környékén érvényes megoldást keressük, a $z = -\ln(-\ln x - C)$ lesz a megfelelő. Ebből $y = -x\ln(-\ln x - C)$. Az $y(1) = 0$ feltételt a $C = -1$ elégíti ki: $y = -x\ln(1 - \ln x)$.

**2.** a) A megfelelő homogén differenciálegyenlet, $y' + y\cos x = 0$, azaz $\dfrac{y'}{y} = -\cos x$ (ha $y \not\equiv 0$), és ebből $\ln|y| = C - \sin x$ azaz $y = Ae^{-\sin x}$, ahol $A \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Az inhomogén differenciálegyenlet megoldását az állandó variálásával $y = A(x)e^{-\sin x}$ alakban keressük. Behelyettesítve az eredeti egyenletbe: $A'(x)e^{-\sin x} - A(x)(\cos x)e^{-\sin x} + A(x)e^{-\sin x}\cos x = \sin x\cos x$, azaz $A'(x)e^{-\sin x} = \sin x \cos x$, amiből $A'(x) = e^{\sin x}\sin x\cos x$. Ebből $A(x) = \int e^{\sin x}\sin x\cos x\,dx = \int ue^u\,du$, ha $u = \sin x$ helyettesítést végzünk. Ez parciális integrálással: $\int ue^u\,du = ue^u - \int e^u\,du = (u-1)e^u + c = (-1+\sin x)e^{\sin x} + c$, és $y = A(x)e^{-\sin x} = -1 + \sin x + ce^{-\sin x}$. A kezdeti feltételt az $y = -1 + \sin x + 2e^{-\sin x}$ függvény elégíti ki.

b) A megfelelő homogén differenciálegyenlet $\dfrac{y'}{y} = 1 + \dfrac{1}{x}$ alakra hozható ($y \not\equiv 0$ esetén, és a megoldása $\ln|y| = x + \ln|x| + C$, azaz $\ln|y| = \ln e^x e^C|x|$, tehát $y = Axe^x$.

Az inhomogén differenciálegyenlet megoldását az állandó variálásával $y = A(x)xe^x$ alakban keressük. Behelyettesítés után

$$A'(x)x^2e^x + A(x)xe^x + A(x)x^2e^x - (x+1)A(x)xe^x = x^2 - x^3, \text{ azaz}$$

$$A'(x) = e^{-x} - xe^{-x}, \text{ és így}$$

$$A(x) = \int e^{-x} - xe^{-x}\,dx = -e^{-x} + xe^{-x} - \int e^{-x}\,dx = xe^{-x} + c, \text{ tehát}$$

$$y = x^2 + cxe^x.$$

**3.** a) Nem egzakt: $P(x,y) = y\sin x - 1$, $Q(x,y) = \cos x$, $P_y = \sin x$, $Q_x = -\sin x$. Viszont elsőrendű lineáris. $y' + y\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}$ alakban az $y$ együtthatójának primitív függvénye $-\ln(\cos x)$, és így $e^{-\ln(\cos x)} = \frac{1}{\cos x}$-szel beszorozva az $y'\frac{1}{\cos x} + y\frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$ differenciálegyenletet kapjuk, amelyben a bal oldal az $y\frac{1}{\cos x}$ deriváltja, tehát $\frac{y}{\cos x} = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C$, és így $y = \sin x + C\cos x$.

b) Nem egzakt: $P_y = 2xy$, $Q_x = -2xy$. Mivel $\dfrac{P_y - Q_x}{Q} = \dfrac{4x}{1-x^2}$ csak $x$-től függ, van csak $x$-től függő multiplikátor, $\dfrac{1}{(1-x^2)^2}$. Ebből a megoldás: $\dfrac{y^2+1}{2(1-x^2)} = C$, azaz $y = \pm\sqrt{A(1-x^2)-1}$. Mellesleg, ehhez a differenciálegyenlethez csak $y$-tól függő multiplikátor is van, ugyanis $\dfrac{Q_x - P_y}{P} = -\dfrac{4y}{y^2+1}$, és ezzel az $\dfrac{x}{y^2+1} + \dfrac{y(1-x^2)}{(1+y^2)^2}y' = 0$ egzakt differenciálegyenlethez jutunk.

c) Egzakt: $P_y = Q_x = -\sin y$. Az $u_x = 2x + \cos y$, $u_y = -x\sin y$ feltételeket kielégítő egyik $u$ függvény $x^2 + x\cos y$, tehát a differenciálegyenlet általános megoldása

$$x^2 + x\cos y = C.$$

Az $y(1) = 0$ feltétel $1 + 1 = C$ esetén teljesül ($x = 1$, $y = 0$-t helyettesítünk az egyenletbe), tehát $x^2 + x\cos y = 2$, azaz

$$y = \arccos\frac{2-x^2}{x}.$$