Órai feladatok

1. Egyváltozós multiplikátorral tegyük egzakttá és oldjuk meg az $e^{-y}+(xe^{-y}-2ye^{-2y})y'=0$ differenciálegyenletet!

▷ $P_y = -e^{-y}$, $Q_x = e^{-y}$, *tehát a differenciálegyenlet nem egzakt, és* $\dfrac{P_y-Q_x}{Q} = \dfrac{-2e^{-y}}{xe^{-y}-2ye^{-2y}} = \dfrac{-2}{x-2ye^{-y}}$ *nem csak* x*-től függ, tehát nincs* $M(x)$ *multiplikátor. Viszont* $\dfrac{Q_x-P_y}{P} = \dfrac{2e^{-y}}{e^{-y}} = 2$ *csak (legföljebb)* y*-tól függ, tehát* $N(y)$ *multiplikátor létezik:* $\ln N(y) = \int 2\,dy = 2y+c$ *miatt* $N(y) = e^{2y}$ *megfelel. A differenciálegyenletet ezzel végigszorozva az*

$$e^y + (xe^y - 2y)y' = 0$$

egzakt differenciálegyenletet kapjuk. Ennek megoldását az $u(x,y) = xe^y - y^2$ *függvényből az*

$$xe^y - y^2 = C$$

implicit egyenlet adja.

2. Oldjuk meg a következő állandó együtthatós, homogén, lineáris differenciálegyenleteket!
a) $y''-6y'+9y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$;
b) $y'''+y''+y'=0$.

▷ *a) A karakterisztikus egyenlet* $m^2-6m+9=0$, *azaz* $(m-3)^2=0$, *ennek egyetlen gyöke a* 3, *ami kétszeres gyök. Az általános megoldás* $y = c_1e^{3x}+c_2xe^{3x}$. *Erre* $y' = 3c_1e^{3x}+c_2(1+3x)e^{3x}$. *A kezdeti feltételekből* $c_1 = 1$ *és* $3c_1+c_2 = 2$, *tehát* $c_2=-1$, *és* $y = e^{3x}-xe^{3x}$.
b) A harmadfokú $m^3+m^2+m=0$ *karakterisztikus egyenletnek három különböző gyöke van:* 0, $-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$, *tehát mindegyik gyök egyszeres. Ezekből az általános megoldás* $c_1 + c_2e^{-x/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3e^{-x/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$.

3. Írjuk fel az általános megoldását annak a homogén, lineáris differenciálegyenletnek, amelynek karakterisztikus egyenlete $m^2(m-1)^3(m^2+1)$. Melyik ez a differenciálegyenlet?

▷ *A karakterisztikus egyenlet gyökei* 0 *(2-szeres),* 1 *(3-szoros) és* $\pm i$ *(mindkettő egyszeres). Ebből az általános megoldás* $y = c_1+c_2x+c_3e^x+c_4xe^x+c_5x^2e^x+c_6\cos x+c_7\sin x$.

4. Milyen próbafüggvényt használnánk ahhoz az állandó együtthatós, inhomogén, lineáris differenciálegyenlethez, amelynek jobb oldalán a következő függvény áll? A karakterisztikus egyenlet milyen gyökei esetén kell még alkalmas x-hatvánnyal megszorozni a próbafüggvényt?

a) $5x^2-1$ b) $x\cos 3x$ c) $e^{2x}\sin x$

▷ *a) A próbafüggvény* Ax^2+Bx+C, *és ezt akkor kell* x^s*-nel megszorozni, ha* 0 *a karakterisztikus egyenletnek* s*-szeres gyöke.*
b) A próbafüggvény $(Ax+B)\cos 3x + (Cx+D)\sin 3x$, *és akkor kell* x^s*-nel megszorozni, ha* $3i$ *a karakterisztikus egyenletnek* s*-szeres gyöke.*
c) A próbafüggvéy $Ae^{2x}\cos x + Be^{2x}\sin x$, *és akkor kell* x^s*-nel megszorozni, ha* $2+i$ *a karakterisztikus egyenletnek* s*-szeres gyöke.*

5. Oldjuk meg a következő inhomogén, lineáris differenciálegyenleteket!

a) $y'' + 2y' + y = \sin x$

b) $y'' + 2y' + y = xe^{-x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$

▷ *a) A karakterisztikus egyenlet $m^2 + 2m + 1 = 0$, azaz $(m + 1)^2 = 0$. Ennek a -1 kétszeres gyöke, tehát a homogén differenciálegyenletnek a $c_1e^{-x} + c_2xe^{-x}$ az általános megoldása. Az inhomogénhez próbafüggvény $y_p = A\cos x + B\sin x$ (nem kell x-szel beszorozni, mert i nem gyöke a karakterisztikus egyenletnek). Ezt behelyettesítve az inhomogén differenciálegyenletbe azt kapjuk, hogy $2B\cos x - 2A\sin x = \sin x$. Tehát $B = 0$ és $A = -\frac{1}{2}$, az inhomogén differenciálegyenlet megoldása pedig $y = -\frac{1}{2}\cos x + c_1e^{-x} + c_2xe^{-x}$.*

b) A homogén ugyanaz, az inhomogén megoldásához a próbafüggvény viszont $(Ax+B)e^{-x} \cdot x^2 = (Ax^3 + Bx^2)e^{-x}$ (x^2-tel azért kellett beszorozni, mert a -1 a karakterisztikus egyenletnek kétszeres gyöke). Az inhomogén differenciálegyenletbe behelyettesítve ezt a próbafüggvényt azt kapjuk, hogy $(6A+2B)xe^{-x} + 2Be^{-x} = xe^{-x}$, amiből $B = 0$ és $A = \frac{1}{6}$. Így a differenciálegyenlet általános megoldása $y = \frac{1}{6}x^3e^{-x}+c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}$. A kezdetiérték-probléma megoldása: $y = \frac{1}{6}x^3e^{-x} + e^{-x}$.

Gyakorló feladatok

1. Egyváltozós multiplikátorral tegyük egzakttá és oldjuk meg az alábbi differenciálegyenleteket!

a) $(y\sin x - 1) + y'\cos x = 0$

b) $x(y^2 + 1) + y(1 - x^2)y' = 0$

2. Oldjuk meg az $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$ állandó együtthatós, homogén, lineáris differenciálegyenletet!

3. Oldjuk meg a következő inhomogén, lineáris differenciálegyenleteket!

c) $y'' + y = -4\cos x, \quad y(\pi) = 0, \quad y'(\pi) = \pi$

d) $y''' - y'' - 2y' = x^3 + e^x$

Megoldások

1. a) $P(x, y) = y\sin x - 1$, $Q(x, y) = \cos x$, $P_y = \sin x$, $Q_x = -\sin x$, tehát az egyenlet nem egzakt. $\dfrac{P_y - Q_x}{Q} = \dfrac{2\sin x}{\cos x}$ csak x-től függ, tehát van $M(x)$ multiplikátor. Erre

$$\ln M(x) = \int \frac{2\sin x}{\cos x}\,dx = -2\ln(\cos x) + c = \ln\frac{1}{\cos^2 x} + c,$$

tehát $M(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ megfelelő. Ezzel végigszorozva az egyenletet:

$$y\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} + y'\frac{1}{\cos x} = 0,$$

ami már valóban egzakt. Az új egyenlethez tartozó $u(x, y)$ függvényre $u_x = y\dfrac{\sin x}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{\cos^2 x}$, és $u_y = \frac{1}{\cos x}$, aminek az egyik megoldása $u = \dfrac{y}{\cos x} - \operatorname{tg} x$, tehát a differenciálegyenlet y megoldása az $\dfrac{y}{\cos x} - \operatorname{tg} x = C$, azaz $y = \sin x + C\cos x$.

b) A differenciálegyenlet nem egzakt, $\dfrac{P_y - Q_x}{Q} = \dfrac{4xy}{y(1-x^2)} = \dfrac{4x}{1-x^2}$ csak x-től függő, és így ad egy $M(x)$ multiplikátort, amelyre $\ln M(x) = \displaystyle\int \frac{4x}{1-x^2}\,dx = -2\ln(1-x^2) + c = \ln\frac{1}{(1-x^2)^2} + c$, vagyis ($c = 0$-val) $M(x) = \dfrac{1}{(1-x^2)^2}$. Ezzel végigszorozva a differenciálegyenletet:

$$(y^2+1)\frac{x}{(1-x^2)^2} + \frac{y}{1-x^2}y' = 0.$$

Ennek az egzakt differenciálegyenletnek a megoldását annak az $u(x,y)$ függvénynek a segítségével tudjuk kifejezni, amelyre

$$u_x = (y^2+1)\frac{x}{(1-x^2)^2} \text{ és } u_y = \frac{y}{1-x^2}.$$

Ennek az egyik megoldása $u = \dfrac{1+y^2}{1-x^2}$, így a differenciálegyenlet y megoldására

$$\frac{1+y^2}{1-x^2} = C, \text{ azaz } y = \pm\sqrt{C(1-x^2)-1}.$$

2. A karakterisztikus egyenlet $m^4+2m^2+1 = 0$, azaz $(m^2+1)^2 = (m-i)^2(m+i)^2 = 0$, és ennek i (és $-i$ is) kétszeres gyöke. Tehát a megoldás $y = c_1\cos x + c_2\sin x + c_3 x\cos x + c_4 x\sin x$.

3. a) A karakterisztikus egyenlet $m^2+1 = 0$, gyökei $\pm i$ (egyszeresek), a homogén differenciálegyenlet megoldása $c_1\cos x + c_2\sin x$. Az inhomogénhez a próbafüggvény $(A\cos x + B\sin x)\cdot x = Ax\cos x + Bx\sin x$. Behelyettesítés után azt kapjuk, hogy $-2A\sin x + 2B\cos x = -4\cos x$, amiből $A = 0$ és $B = -2$. Tehát az általános megoldás $y = -2x\sin x + c_1\cos x + c_2\sin x$, és a kezdetiérték-probléma megoldása $y = -2x\sin x + \pi\sin x = (\pi - 2x)\sin x$.

b) A karakterisztikus egyenlet $m^3 - m^2 - 2m = 0$, azaz $m(m-2)(m+1) = 0$. A gyökei $0, 2, -1$, egyszeresek, a homogén általános megoldása $c_1 + c_2e^{2x} + c_3e^{-x}$. Az inhomogént két részre bontjuk. Az x^3 jobb oldalhoz a próbafüggvény $(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)x = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx$. Behelyettesítés után ebből az $y_1 = -\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{8}x^2 + \frac{15}{8}x$. Az e^x jobb oldalhoz a próbafüggvény Ae^x, és behelyettesítés után az $y_1 = -\frac{1}{2}e^x$ megoldást kapjuk. Tehát az eredeti differenciálegyenlet általános megoldása $y = -\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{8}x^2 + \frac{15}{8}x - \frac{1}{2}e^x + c_1 + c_2e^{2x} + c_2e^{-x}$.