Matematika A3 (közlekedésmérnököknek), 2016. ősz
2. zh
Megoldások

1. Az $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, \operatorname{ch} t)$ $(t \geq 0)$ görbe sebességvektora: $\dot{\mathbf{r}}(t) = (-\sin t, \cos t, \operatorname{sh} t)$, amiből az ívhosszfüggvény

$$s(t) = \int_0^t |\dot{\mathbf{r}}(\tau)| \, \mathrm{d}\tau = \int_0^t \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + \operatorname{sh}^2 t} \, \mathrm{d}\tau = \int_0^t \operatorname{ch}(\tau) \, \mathrm{d}\tau = \operatorname{sh}(t).$$

Vagyis $t = \operatorname{arsh}(s)$ alapján $r(s) = (\cos(\operatorname{arsh} s), \sin(\operatorname{arsh} s), \operatorname{ch}(\operatorname{arsh} s))$. Az új paramétertartomány: $s \geq 0$.

2. A $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = e^{y^2} \cdot \mathbf{i} + (2xye^{y^2} + \sin 2z) \cdot \mathbf{j} + 2y \cos 2z \cdot \mathbf{k}$ vektormező mindenhol értelmezett és a rotációja:

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ e^{y^2} & (2xye^{y^2} + \sin 2z) & 2y \cos 2z \end{vmatrix} = (2\cos(2z) - 2\cos(2z), 0 - 0, 2ye^{y^2} - 2ye^{y^2}) = \mathbf{0}$$

a teljes $\mathbb{R}^3$-on. Tehát létezik potenciálfüggvénye: $u(x, y, z) = xe^{y^2} + y \sin(2z) + C$.
A $\mathbf{v}$-nek létezik potenciálfüggvénye, ezért a b) feladatban a zárt görbén vett vonalmenti integrálja 0.

3. Az $\mathcal{F}$ irányított felület egy lehetséges paraméterezése: $\mathbf{r}(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v)$, ahol $u \in [0, 2\pi]$ és $v \in [-1, 1]$. Ezzel $\mathbf{v}(\mathbf{r}(u, v)) = (\cos u, \sin u, v^2 - 1)$. A felületi normálvektor:

$$\mathbf{n}_{\mathcal{F}}(u, v) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos u, \sin u, 0).$$

Így az integrál

$$\int_{\mathcal{F}} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \, \mathrm{d}\mathcal{F} = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} (\cos u, \sin u, v^2 - 1) \cdot (\cos u, \sin u, 0) \, \mathrm{d}u \mathrm{d}v = \ldots = 4\pi.$$

VAGY: a henger két alapján a vektormező harmadik koordinátája 0, és a felületi normálvektor $(0, 0, \lambda)$ alakú, tehát ezeken a felületdarabokon a felületmenti integrál 0 . Ezért alkalmazható a teljes hengerre a Gauss-Osztrogradszkij tétel.
A henger belseje hengerkoordinátákkal: $\mathbf{V}(r, \varphi, z) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)$, ahol $r \in [0, 1], \varphi \in [0, 2\pi], z \in [-1, 1]$. A koordináta-transzformáció Jacobi-determinánsának abszolútértéke pedig r.
Így az integrál

$$\int_{\mathcal{F}} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \, \mathrm{d}\mathcal{F} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{v} \, \mathrm{d}V = \int_{-1}^1 \int_0^1 \int_0^{2\pi} (2 + 2z) \cdot r \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}z = 4\pi.$$

4. Mivel a $\mathcal{G}$ görbe az (x, y) koordinátasíkban van, ezért a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = -y \cdot \mathbf{i} + x \cdot \mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k}$. A vektormező $\mathcal{G}$-n vett vonalintegráljához alkalmazhatjuk a Stokes-tételt (vagy egyből a Green-tételt, mert $\mathcal{G}$ az (x, y) síkban van). A $\mathcal{G}$ által határolt $\mathcal{F}$ felületdarab egy lehetséges paraméterezése: $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, 0)$, ahol $u \in [0, 1]$ és $v \in [0, 2/(u + 1) - 1]$. A felületi normálvektor ezzel

$$\mathbf{n}_{\mathcal{F}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 1).$$

Így

$$\int_{\mathcal{G}} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \, \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{\mathcal{F}} \operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \, \mathrm{d}\mathcal{F}.$$

A vektormező rotációja

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 2).$$

Így az integrál

$$= \int_0^1 \int_0^{2/(x+1)-1} (0, 0, 2) \cdot (0, 0, 1) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = 4 \ln 2 - 2.$$

VAGY görbementi integrálként számolva: a két koordináta-tengelyen a vektormező merőleges az szakaszok érintővektoraira, ezért ezeken a görbedarabokon a görbementi integrál 0. Az ív egy lehetséges paraméterezése: $\mathbf{r}(t) = (1-t, 2/(2-t)-1, 0)$, ahol $t \in [0,1]$. Ebből $\dot{\mathbf{r}}(t) = (-1, -2/(2-t)^2, 0)$, az integrál pedig:

$$\int_{\mathcal{G}} \mathbf{v}(\mathbf{r})\ \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_0^1 -1 - \frac{2}{t-2} - \frac{2t-4}{(t-2)^2} - \frac{2}{(t-2)^2}\ \mathrm{d}t = \ldots = -2 + 4\ln 2.$$

5. $\mathcal{F}$ zárt felület, ezért alkalmazható a Gauss–Osztrogradszkij-tétel, melyet felhasználva:

$$\int_{\mathcal{F}} \mathbf{v}(\mathbf{r})\ \mathrm{d}\mathcal{F} = \int_V \operatorname{div}\mathbf{v}\ \mathrm{d}V = \cdots$$

ahol V a kocka belseje és $\operatorname{div}\mathbf{v} = 3x + \pi\cos\pi z$. Ezzel az integrál

$$= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 1 + 3x + \pi\cos\pi z\ \mathrm{d}z\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x = \ldots = 3/2.$$

VAGY felületmenti integrálként számolva a 6 lapon külön: ha $y = 0$, akkor $\mathbf{v} = (\mu, 0, \lambda)$ alakú, ami merőleges a laphoz tartozó $(0, -\kappa, 0)$ felületi normálvektorra, emiatt ezen a lapon az integrál 0. Ugyanígy, ha $x = 0$, akkor $\mathbf{v} = (0, \mu, \lambda)$ alakú, ez a laphoz tartozó normálvektorra merőleges. Hasonlóan, ha $z = 0$ vagy 1, akkor $\mathbf{v} = (\lambda, \mu, 0)$ alakú, ami merőleges a laphoz tartozó normálvektorra, ezért ezen a két lapon is 0 az integrál. Az integrál egyedül az $x = 1$, ill. $y = 1$ síkokhoz tartozó lapokon nem 0. Az $x = 1$ lapon az $r(u,v) = (1, u, v) : u, v \in [0,1]$ paraméterezés mellett $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{\mathcal{F}} = 1$, így itt az integrál értéke 1. Az $y = 1$ lapon az $r(u,v) = (v, 1, u)u, v \in [0,1]$ paraméterezés mellett az $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{\mathcal{F}} = x$, így az integrál értéke ezen a lapon 1/2.

6. A $\mathbf{r}(u,v) = \operatorname{sh} u \cdot \mathbf{i} + e^v \cdot \mathbf{j} + uv \cdot \mathbf{k}$ felületdarab felületi normálvektora

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \operatorname{ch} u & 0 & v \\ 0 & e^v & u \end{vmatrix} = (-ve^v, -u\operatorname{ch} u, e^v \operatorname{ch} u),$$

ami pontosan az $u = v = 0$ választás mellett lesz $(0, 0, \lambda)$ alakú és emiatt merőleges az (x, y) koordinátasíkra. Az $u = v = 0$ paraméterértékekhez a felület $\mathbf{r}(0,0) = (0,1,0)$ pontja tartozik, amit az (x,y) koordinátasík is tartalmaz, hiszen a harmadik koordináta 0, ezért ebben (és csak ebben) a pontban lesz a koordinátasík érintősík.