

1. Kétváltozós függvényekre való visszavezetéssel bizonyítsuk be, hogy az $f(z) = |z|$ és $g(z) = az + b$ ($a, b \in \mathbb{C}$) függvények mindenütt folytonosak!

2. Határozzuk meg a következő komplex függvények határértékét z_0 -ban, ha létezik! Lehet-e egy függvényérték megváltoztatásával mindenütt folytonossá tenni a függvényt?

a) $\frac{\bar{z}}{z}, z_0 = 0$

b) $\frac{z \operatorname{Re} z}{|z|}, z_0 = 0$

c) $\frac{z^4 + 3z^2 + 2}{z - i}, z_0 = i$

3. Differenciálhatók-e valahol az alábbi komplex függvények? Ahol differenciálható, ott adjuk is meg a deriváltat!

a) $|z|^2$

b) $\cos \bar{z}$

4. Határozzuk meg azt a reguláris $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ függvényt, amelyre

a) $u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, (x, y) \neq (0, 0), f(\pi) = \frac{1}{\pi};$ b) $v(x, y) = 2y(x + 1), f(i) = 2i - 1.$

5. Határozzuk meg az alábbi komplex hatványsorok konvergenciatartományának középpontját és sugarát, valamint a c)-beli hatványsor összegfüggvényét!

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{n^n} (z-i)^n$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{i^n} (z+i)^{n+1}$

6. Számítsuk ki az $f(z)$ függvény integrálját a megadott \mathcal{G} görbe mentén:

a) $f(z) = iz^2 - 2\bar{z}, \mathcal{G}: |z| = 2, \operatorname{Re} z \geq 0, \operatorname{Im} z \geq 0,$ a kör negatív irányítása szerint;

b) $f(z) = \operatorname{Re}(z + z^2), \mathcal{G}$ a $y = x^2$ ($0 \leq x \leq 1$) egyenletű parabola a komplex síkon, és az irány az x növekedésének iránya;

c) $f(z) = \frac{z+2}{z}, \mathcal{G}$ a $|z| = 2, \operatorname{Im} z \leq 0$ körív, pozitív forgásiránnyal;

d) $f(z) = 3z^{\bar{z}} + 2z, \mathcal{G}$ az $1 - i, 2 - i, 2 + i$ pontokat összekötő törtvonal.