1. Bizonyítsuk be, hogy a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (2x + 6xz,\ -2y,\ 3x^2 - 3z^2)$ vektor-vektorfüggvény forrásmentes és örvénymentes is.

2. Számítsuk ki a következő vektor-vektorfüggvények felületi integrálját a megadott felületeken!

a) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (x,\ -y,\ z)$, $\mathcal{F}:\ \mathbf{r}(u,v) = (u + 2v,\ v,\ u - v)$, $0 \le u \le 3$, $0 \le v \le 1$, a normálvektorok lefelé mutatnak

b) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}|\mathbf{r}|^3$, $\mathcal{F}:\ x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \ge 0$, felfelé irányítva

c) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (x, y, z)$, $\mathcal{F}:\ \mathbf{r}(u,v) = (3\cos v,\ 3\cos u \sin v,\ \sin u)$, $0 \le u \le \pi$, $0 \le v \le 2\pi$, $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$-vel irányítva.

3. Számítsuk ki a következő zárt felületeken a felületi integrált (használjuk a Gauss–Osztrogradszkij-tételt)

a) $\iint\limits_{\mathcal{F}} (xz, xy, yz)\,\mathbf{dF}$, ahol $\mathcal{F}$ a $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ felület és a $z = 0$ sík által határolt tartomány felülete, befelé mutató normálvektorokkal;

b) $\iint\limits_{\mathcal{F}} (x^3, y^3, z^3)\,\mathbf{dF}$, ahol $\mathcal{F}$ az $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ egyenletű gömbfelület, kifelé mutató normálvektorokkal;

c) $\iint\limits_{\mathcal{F}} (xe^z, ze^x, ye^y)\,\mathbf{dF}$, ahol $\mathcal{F}$ a $3z^2 = x^2 + y^2$ kúp felső térfélbe eső része és az $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ gömb által határolt térbeli tartomány teljes felülete kifelé mutató normálvektorokkal!

4. Számítsuk ki a következő zárt görbéken az integrált Stokes-tétellel és anélkül:

a) a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (y^2, z^2, x^2)$ függvény integrálja az $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ és $C(0,0,1)$ pontokon, majd újra az A ponton keresztülhaladó zárt törtvonal mentén;

b) a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (x, x + y, x + y + z)$ függvény integrálja az $x^2 + y^2 = 4$, $z = 2$ egyenletekkel meghatározott körvonalon, pozitív irányban.

5. A Green-tétel felhasználásával számítsuk ki a

a) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (3x^2 e^{y^2}, 2x^3 y e^{y^2})$ függvény integrálját a $\mathcal{G}:\ \mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \le t \le \pi$ görbe mentén;

b) a $\mathbf{v} = (xy^2 + 3y, -x^2 y)$ függvény integrálját az $A(-2,0)$, $B(0,1)$, $C(2,0)$ pontokon keresztülhaladó töröttvonal mentén.