1. *Számítsuk ki az alábbi komplex kifejezések értékét/értékeit:*

a) $(\overline{3+i}) \cdot \frac{5}{2+i}$ *b)* $(1+i)^3$ *c)* $(\sqrt{2}-i\sqrt{2})^8$ *d)* $(-i)^n$, $n \in \mathbb{Z}$

e) $\sqrt[4]{-16}$ *f)* $\sqrt[3]{-4\sqrt{2}+i4\sqrt{2}}$ *g)* $\sqrt[5]{(1+i)^5}$ *h)* $(\sqrt[5]{1+i})^5$

Megoldás: a) $(\overline{3+i}) \cdot \frac{5}{2+i} = (3-i) \cdot \frac{5(2-i)}{5} = 5-5i.$

b) $(1+i)^3 = (1+i)^2(1+i) = 2i(1+i) = -2+2i$

c) $\sqrt{2}-i\sqrt{2} = 2\big(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\big) = 2\big(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})\big) \Rightarrow$
$(\sqrt{2}-i\sqrt{2})^8 = 2^8(\cos(-2\pi) + i\sin(-2\pi)) = 256.$

d) Mivel $(-i)^4 = i^4 = (-1)^2 = 1$, a $(-i)^n$ értéke csak az n 4-gyel vett osztási maradékától függ: $(-i)^{4k} = 1$, $(-i)^{4k+1} = -i$, $(-i)^{4k+2} = -1$ és $(-i)^{4k+3} = i$.

e) $-16 = 16(\cos\pi + i\sin\pi) \Rightarrow \sqrt[4]{-16} = 2(\cos(\frac{\pi}{4} + k\frac{2\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4} + k\frac{2\pi}{4}))$, ahol $0 \le k \le 3$, és ez $\pm\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}$ mind a négy lehetséges értéke.

f) $-4\sqrt{2}+i4\sqrt{2} = 8\big(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\big) \Rightarrow$
$\sqrt[3]{-4\sqrt{2}+i4\sqrt{2}} = 2\big(\cos(\frac{\pi}{4} + k\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{4} + k\frac{2\pi}{3})\big)$ $(k = 0, 1, 2)$.

g) $\sqrt[5]{(1+i)^5}$ egyik értéke nyilván $(1+i)$, és akkor a többit megkapjuk, ha ezt megszorozzuk $\cos(k\frac{2\pi}{5}) + i\sin(k\frac{2\pi}{5})$-tel $k = 1, 2, 3, 4$-re. Grafikusan: felrajzoljuk azt az origó középpontú szabályos ötszöget, amelynek egyik csúcsa $1+i$. Trigonometrikus alakban felírva az eredményeket: $\sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4} + k\frac{2\pi}{5}) + i\sin(\frac{\pi}{4} + k\frac{2\pi}{5}))$ $(k = 0, 1, 2, 3, 4)$.

h) A gyökvonás definíciója szerint az $1+i$ mindegyik ötödik gyökének $1+i$ az 5. hatványa, tehát az eredmény $1+i$.

2. *Mi a mértani helye a komplex számsík azon z pontjainak, amelyekre*

a) $|z+2-3i| = 4$ *b)* $1 < |z-i| < 3$ *c)* $|\,z-2\,| + |\,z+2\,| = 16$

d) $Re((1+i)z) = 4$ *e)* $|\,z-i\,| = |\,z-2-i\,|$ *f)* $\dfrac{|z-3|}{|z+3|} = 2$ *?*

Megoldás: a) $|z+2-3i| = |z-(-2+3i)|$, és ez a z távolsága a $-2+3i$ ponttól. Tehát a z pontok mértani helye a $-2+3i$ körüli 4 sugarú kör.

b) Ez egy i középpontú körgyűrű a határai nélkül, ahol a belső határoló kör 1 sugarú, a külső pedig 3 sugarú.

c) Azon pontok, amelyeknek két adott ponttól (a fókuszpontoktól) való távolságának összege állandó, ellipszist alkotnak, tehát a mértani hely egy ellipszis. (Középpontja a két fókuszpontot összekötő szakasz felezőpontja, ami most az origó, és könnyen kiszámítható, hogy a vízszintes tengelye 8, a függőleges pedig $\sqrt{60}$ hosszú.

d) Írjuk fel z-t algebrai alakban: $z = x+yi$, ahol $x, y \in \mathbb{R}$. Ekkor az egyenlet: $4 = Re((1+i)(x+yi)) = Re((x-y)+(x+y)i) = x-y$, vagyis a mértani hely az $y = x-4$ egyenes.

e) Azokról a z pontokról van szó, amelyek az i és $2+i$ pontoktól azonos távolságra vannak, vagyis az i és $2+i$ vízszintes szakasz felező merőlegesének ($Re\,z = 1$) pontjairól.Az egyenest felírhatjuk koordinátásan is, ha behelyettesítjük az egyenletbe a $z = x+yi$-t, négyzetre emeljük, és egyszerűsítjük az egyenletet: $x^2+(y-1)^2 = (x-2)^2+(y-1)^2$, azaz $x = 1$.

f) Az e) koordinátás felírásának a mintájára azt kapjuk, hogy $(x-3)^2+y^2 = 4((x+3)^2+y^2)$, azaz $3x^2+30x+3y^2+27 = 0$. Átrendezve ez $(x+5)^2+y^2 = 16$, a -5 körüli 4 sugarú kör egyenlete. Mivel ezen nincs rajta a $z = -3$, az eredeti hányados alak is értelmezve van a kör mindegyik pontjában, tehát a kör minden pontja hozzátartozik a mértani helyhez.

3. *Oldjuk meg a következő egyenleteket a komplex számok halmazán!*

a) $z^2 - 6z + 13 = 0$ *b)* $z^2 + (1+i)z + i = 0$ *c)* $z^6 + 2z^3 + 2 = 0$ *d)* $|\,\overline{z}\,| = -4z$

Megoldás: a) $z = \dfrac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = 3 \pm 2i$.

b) $z = \dfrac{-(1+i) \pm \sqrt{-2i}}{2}$. A $\sqrt{-2i}$ értékét kiszámíthatjuk trigonometrikus alakban: $-2i = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$, amiből $\sqrt{-2i} = \sqrt{2}\big(\cos(\frac{3\pi}{4} + k\cdot\pi) + i\sin(\frac{3\pi}{4} + k\cdot\pi)\big) = \pm(-1+i)$, így $z_1 = -1$, $z_2 = -i$.

c) $z^3 = \dfrac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -1 \pm i$ trigonometrikus alakja $\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$, illetve $\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4})$, így z értékei
$z_{1,2,3} = \sqrt[6]{2}\left(\cos(\frac{\pi}{4} + k\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{4} + k\frac{2\pi}{3})\right)$, és
$z_{4,5,6} = \sqrt[6]{2}\left(\cos(\frac{5\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{5\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3})\right)$ $(k = 0, 1, 2)$.

d) A bal oldal abszolút értéke $|\overline{z}| = |z|$, a jobb oldalé pedig $|-4z| = 4|z|$, tehát csak akkor lehetnek egyenlők, ha $|z| = 0$, azaz $z = 0$, az pedig valóban megoldás is.

4. *Döntsük el, hogy konvergensek-e, abszolút konvergensek-e az alábbi számsorok!*

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$ *c)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^n}$ *e)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+i)^n}{n2^n}$

Megoldás: a) Mivel $0 \le \frac{n}{n^3+1} \le \frac{1}{n^2}$, és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergens, a majoránskritérium miatt $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$ is (abszolút) konvergens.

b) A sor tagjai nem tartanak 0-hoz ($\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$), ezért a sor divergens.

c) A sor konvergens, mert Leibniz-sor: váltakozó előjelű, a tagok 0-hoz tartanak, és abszolút értékben monoton csökkenők $\Big(\frac{n}{n^2+1} > \frac{n+1}{(n+1)^2+1} \Leftrightarrow n(n^2+2n+2) > (n+1)(n^2+1) \Leftrightarrow n^3 + 2n^2 + 2n > n^3 + n^2 + n + 1 \Leftrightarrow n^2 + n > 1\Big)$. Viszont nem abszolút konvergens, mert $\frac{n}{n^2+1} > \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2n}$, és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergens.

d) Ez mértani sor, s mivel a hányadosának, $\frac{1+i}{2}$-nek az abszolút értéke $\frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, abszolút konvergens.

e) A gyökkritériumot alkalmazzuk: $\sqrt[n]{\left|\dfrac{(2+i)^n}{n2^n}\right|} = \dfrac{|2+i|}{2\sqrt[n]{n}} \to \dfrac{\sqrt{5}}{2} > 1$, ezért a sor divergens.

5. *Határozzuk meg a következő függvénysorok konvergenciatartományát!*

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n\cdot 2^n}$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)^2}x^n$ *c)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n x^n$ *d)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(z-i)^n}$

Megoldás: a) A gyökkritériumot alkalmazzuk. A sor n-edik tagja abszolút értékének n-edik gyöke $\frac{|x-1|}{2\sqrt[n]{n}} \to \frac{|x-1|}{2} < 1$, ha $|x-1| < 2$, és > 1, ha $|x-1| > 2$. Tehát a sor abszolút konvergens a $(-1,3)$ intervallumon, és divergens, ha $x < -1$ vagy $x > 3$. A határokon: $x = -1$-re $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ konverges Leibniz-sor, de $x = 3$-ra $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergens, tehát a konvergenciatartomány $K = [-1,3)$.

b) A hányadoskritériumot alkalmazva azt kapjuk, hogy a sor $(n+1)$-edik és n-edik tagja hányadosának abszolút értéke $(n+1)\dfrac{(n+1)^2}{(n+2)^2}|x| \to \infty$, ha $x \neq 0$, így a sor csak $x = 0$ esetén konvergens.

c) $\sqrt[n]{(1-\frac{1}{n})^n |x|^n} = (1-\frac{1}{n})|x| \to |x| < 1$ esetén konvergens, $|x| > 1$ esetén divergens. Ha $|x| = 1$, akkor a sor tagjai abszolút értékben $\frac{1}{e}$-hez tartanak, tehát nem tartanak 0-hoz, így ott a sor divergens. A konvergenciatartomány $K = (-1,1)$.

d) $\sqrt[n]{\frac{n}{|z-i|^n}} = \frac{\sqrt[n]{n}}{|z-i|} \to \frac{1}{|z-i|} < 1$ esetén konvergens, $\frac{1}{|z-i|} > 1$ esetén divergens a sor. Ha $|z-i| = 1$, akkor $\left|\frac{n}{(z-i)^n}\right| = n \to \infty$, tehát akkor is divergens. A konvergenciatartomány $K = \{\, z \mid |z-i| > 1 \,\}$, azaz a komplex síknak az a része, ami az i középpontú, 1 sugarú zárt körlap kivágása után megmarad.

6. *Adjuk meg a következő számsor, illetve hatványsorok összegét!*

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{(2+i)^{n+1}}$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ *c)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot 2^n (x-1)^n$

Megoldás: a) Ez egy mértani sor $\frac{1+i}{2+i}$ hányadossal. Az a kezdőtagú, q hányadosú (valós vagy komplex) mértani sor pontosan akkor konvergens, ha $|q| < 1$, és ekkor az összege $\dfrac{a}{1-q}$. Esetünkben $|q| = \frac{|1+i|}{|2+i|} = \sqrt{\frac{2}{5}} < 1$, és az összeg $\dfrac{1}{2+i} \cdot \dfrac{1}{1-\frac{1+i}{2+i}} = \dfrac{2+i}{2+i} = 1$.

b) Ez a sor abszolút konvergens a $(-1,1)$ intervallumon, és itt szabad tagonként deriválni vagy integrálni. Tehát ha az összegfüggvény $f(x)$, akkor $(xf(x))' = \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, amiből $xf(x) = \int -\frac{1}{x-1}\,dx = -\ln|x-1| + C = -\ln(1-x) + C$. Az $x = 0$ behelyettesítéséből kapjuk, hogy $C = 0$, tehát az összegfügvény $f(x) = -\frac{1}{x}\ln(1-x)$.

c) $$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot 2^n (x-1)^n = (x-1)\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot 2^n (x-1)^{n-1} = (x-1)\left(\sum_{n=1}^{\infty} 2^n (x-1)^n\right)' =$$ $$(x-1)\left(\sum_{n=0}^{\infty} (2x-2)^n\right)' = (x-1)\left(\frac{1}{3-2x}\right)' = (x-1)\frac{2}{(3-2x)^2},$$ ahol a sor abszolút konvergens, azaz $x \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ esetén.

7. *Adjuk meg a következő függvények* 0 *körüli Taylor-sorát!*

a) $\dfrac{1}{x+1}$ *b)* xe^x *c)* $\cos^2 x$ *d)* $\operatorname{arctg} x$

Megoldás: Felhasználjuk azt, hogy ha $f(x)$ előállítható az x_0 egy teljes környezetében egy

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ hatványsor összegeként, akkor $f^{(n)}(x_0) = n!a_n$, tehát ez a sor a függvény x_0 körüli Taylor-sora.

a) $\frac{1}{x+1} = \frac{1}{1-(-x)}$ a $-x$ hányadosú, 1 kezdőtagú mértani sor összege ($|x| < 1$-re), tehát $\frac{1}{x+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ a függvény 0 körüli Taylor-sora.

b) $xe^x = x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n+1}$.

c) $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-4)^n}{(2n)!}x^{2n}$.

d) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ a mértani sor összegképlete alapján, és így $\operatorname{arctg} x = C + \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$. Az $x=0$ behelyettesítésével megkapjuk, hogy $C=0$, tehát $\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$, ha $|x|<1$, és így ez az $\operatorname{arctg} x$ függvény Taylor-sora.