1. *Írjuk fel az alábbi függvényeket $f(x+yi) = u(x,y) + iv(x,y)$ alakban.*

a) $f(z) = z^2 + \frac{1}{z}$ *b)* $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$

Megoldás: a) $f(x+yi) = (x+yi)^2 + \frac{1}{x+yi} = x^2 - y^2 + 2xyi + \frac{x-yi}{x^2+y^2} = \left(x^2 - y^2 + \frac{x}{x^2+y^2}\right) + i\left(2xy - \frac{y}{x^2+y^2}\right)$

b) $$f(x+yi) = \frac{x+yi+1}{x+yi-1} = \frac{x+1+yi}{x-1+yi} = \frac{(x+1+yi)(x-1-yi)}{(x-1)^2+y^2} =$$
$$= \frac{x^2+y^2-1-2yi}{(x-1)^2+y^2} = \frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2} + i\frac{-2y}{(x-1)^2+y^2}.$$

2. *Bizonyítsuk be, hogy $e^{z+u} = e^z e^u$ minden $z, u \in \mathbb{C}$ komplex számra!*

Megoldás: Felhasználjuk, hogy ha a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ (komplex) számsorok abszolút konvergensek, akkor a Cauchy-szorzatuk, $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)$ is abszolút konvergens, és az összege a két sor összegének szorzata. Így
$$e^z \cdot e^u = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} u^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} z^k \frac{1}{(n-k)!} u^{n-k}\right) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} z^k u^{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!}\binom{n}{k} z^k u^{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z+u)^n = e^{z+u}.$$

3. *Lássuk be, hogy $e^{z/2}$ az e^z egyik négyzetgyöke! Mi a másik? Fejezzük ki azt is e hatványaként!*

Megoldás: A 2. feladat szerint $(e^{z/2})^2 = e^{z/2}e^{z/2} = e^{\frac{z}{2}+\frac{z}{2}} = e^z$. Ekkor nyilván $(-e^{z/2})^2 = e^z$ is igaz, és $-1 = e^{i\pi/2}$, tehát a másik négyzetgyök $e^{\frac{z}{2}+i\frac{\pi}{2}}$.

4. *Adjuk meg algebrai alakban a következő komplex függvényértékeket!*

a) $e^{5+\frac{\pi}{2}i}$ *b)* $e^{1-i\arcsin(1/3)}$ *c)* $\mathrm{ch}(\ln 3 + i\frac{\pi}{4})$ *d)* $\cos(-i)$ *e)* $\mathrm{tg}\,\frac{i\pi}{2}$

Megoldás: a) $e^{5+\frac{\pi}{2}i} = e^5 \cdot e^{\frac{\pi}{2}i} = e^5(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = e^5 i.$

b) $e^{1-i\arcsin(1/3)} = e(\cos(-\arcsin(1/3)) + i\sin(-\arcsin(1/3))) = e\left(\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} - \frac{1}{3}i\right) = \frac{2\sqrt{2}e}{3} - \frac{e}{3}i.$

c) $\mathrm{ch}(\ln 3 + i\frac{\pi}{4}) = \frac{e^{\ln 3+\frac{\pi}{4}} + e^{-\ln 3 - \frac{\pi}{4}}}{2} = \frac{3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})\right)}{2} =$
$= \frac{3\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)}{2} = \frac{9+9i+1-i}{6\sqrt{2}} = 5 + 4i3\sqrt{2}.$

d) $\cos(-i) = \cos i = \mathrm{ch}\,1 = \frac{e+\frac{1}{e}}{2}$

e) $$\mathrm{tg}\,\frac{i\pi}{2} = \frac{\sin\frac{i\pi}{2}}{\cos\frac{i\pi}{2}} = \frac{i\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi}{2}}{\mathrm{ch}\,\frac{\pi}{2}} = i\mathrm{th}\,\frac{\pi}{2}$$

5. *Számítsuk ki a következő komplex logaritmusok összes értékét, és adjuk meg a főértéküket!*

a) $\ln(-5+5i)$ *b)* $\ln(-e)$. *c)* $\ln(\sqrt{3}+i)$

Megoldás: a) $-5+5i = 5\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$, így $\ln(-5+5i) = \ln(5\sqrt{2}) + (\frac{3\pi}{4} + 2k\pi)i$, a logaritmus főértéke pedig $\ln(5\sqrt{2}) + \frac{3\pi}{4}i$.

b) A $-e$ szám trigonometrikus alakja $e(\cos\pi + i\sin\pi)$, így $\ln(-e) = \ln e + i(\pi + 2k\pi)i = 1 + (2k+1)\pi i$, a logaritmus főértéke pedig $1 + \pi i$.

c) $\sqrt{3} + i = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$, így $\ln(\sqrt{3} + i) = \ln 2 + i(\frac{\pi}{6} + 2k\pi)$, a logaritmus főértéke pedig $\ln 2 + i\frac{\pi}{6}$.

6. *Oldjuk meg az egyenleteket a komplex számok körében!*

a) $\sin z = -2$ *b)* $\operatorname{tg} z = -i$ *c)* $\cos z = i\sqrt{3}$

Megoldás: a) $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, így az egyenlet ekvivalens az $e^{iz} - e^{-iz} = -4i$ egyenlettel, és ezt e^{iz}-vel beszorozva és átrendezve az $(e^{iz})^2 + 4ie^{iz} - 1 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk e^{iz}-re, aminek a megoldása $e^{iz} = \frac{-4i \pm \sqrt{-16+4}}{2} = -2i \pm \sqrt{3}i = (-2 \pm \sqrt{3})i$. Ez trigonometrikus alakban $(2 \mp \sqrt{3})\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$, amiből logaritmus számításával azt kapjuk, hogy $iz = \ln(2 \mp \sqrt{3}) + \left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$, tehát $z = \left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) - i\ln(2 \mp \sqrt{3})$.

b) $\operatorname{tg} z = \dfrac{\sin z}{\cos z} = \dfrac{-i\operatorname{sh}(iz)}{\operatorname{ch}(iz)} = -i\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}$, így a $\operatorname{tg} z = -i$ egyenlet $e^{iz} - e^{-iz} = e^{iz} + e^{-iz}$ alakra hozható, ami az $e^{-iz} = 0$ egyenlettel ekvivalens, aminek nincs megoldása.

c) $\cos z = i\sqrt{3} \Leftrightarrow \operatorname{ch} iz = i\sqrt{3} \Leftrightarrow e^{iz} + e^{-iz} = i2\sqrt{3} \Leftrightarrow (e^{iz})^2 - i2\sqrt{3}e^{iz} + 1 = 0$. Ebből $e^{iz} = \dfrac{i2\sqrt{3} \pm \sqrt{-12-4}}{2} = i\sqrt{3} \pm 2i = i(\sqrt{3} \pm 2)$. Az első megoldás trigonometrikus alakja $(2 + \sqrt{3})(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$, amiből $iz = \ln(2 + \sqrt{3}) + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$, és $z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln(2 + \sqrt{3})$, a másodiké $(2 - \sqrt{3})(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2}))$, amiből $iz = \ln(2 - \sqrt{3}) + i(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$, és így $z = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln(2 - \sqrt{3})$.

7. *Számítsuk ki a következő hatványokat!*

a) i^i *b)* $(i+1)^i$ *c)* 2^{5i} *d)* $i^{1/2}$

Megoldás: a) $i^i = e^{i\ln i}$, ahol $\ln i = \ln(1 \cdot (\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})) = 0 + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$, és így $i^i = e^{-(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)}$. (A hatvány főértéke ott van, ahol a logaritmus főértékét vesszük, tehát i^i főértéke $e^{-\frac{\pi}{2}}$.

b) $(i+1)^i = e^{i\ln(i+1)}$, ahol $\ln(i+1) = \ln(\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})) = \ln\sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi) = \frac{\ln 2}{2} + i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)$, tehát $(i+1)^i = e^{-(\frac{\pi}{4} + 2k\pi) + i(\ln 2)/2} = e^{-(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)}(\cos\frac{\ln 2}{2} + i\sin\frac{\ln 2}{2})$.

c)

d) $i^{1/2} = e^{(1/2)\ln i} = e^{(i/2)(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)} = e^{i(\frac{\pi}{4} + k\pi)} = \cos(\frac{\pi}{4} + k\pi) + i\sin(\frac{\pi}{4} + k\pi) = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$. (Vegyük észre, hogy ez megegyezik az i két négyzetgyökével!)