A Cauchy-féle integrálformula, illetve a Cauchy-integráltétel segítségével számítsuk ki a következő integrálokat.

1. $\displaystyle\oint_{\mathcal{G}} \frac{e^{z^2-1}}{z+i}\,dz$, *ahol* $\mathcal{G}$ *a* -1, $1-i$, $1+i$ *csúcsú zárt háromszögvonal pozitív irányban.*

Megoldás: A tört számlálója és nevezője is mindenütt differenciálható, és a nevező 0-helye, $-i$ nincs benne a háromszögben, ezért az integrandus reguláris egy a háromszöget tartalmazó egyszeresen összefüggő tartományon, következésképpen az integrálja 0.

2. *a)* $\displaystyle\oint_{\mathcal{G}} \frac{e^{\pi z}}{z-2i} + \frac{1}{e^z+1}\,dz$, *ahol* $\mathcal{G} : |z-2i| = 1$, *pozitív körüljárással*

b) $\displaystyle\oint_{\mathcal{G}} \frac{\operatorname{ch} z}{z^5}\,dz$, *ahol* $\mathcal{G}$ *egy origó középpontú kör, negatív körüljárással*

c) $\displaystyle\oint_{\mathcal{G}} \frac{\sin z}{(z-i)^3}\,dz$, *ahol* $\mathcal{G}$ *a* $|z-1| + |z+1| = 4$ *egyenletű ellipszis, pozitív irányban*

Megoldás: a) Az első tag szingularitása, $2i$ a kör belsejébe esik, így az első tag integrálja $\displaystyle\oint_{\mathcal{G}} \frac{e^{\pi z}}{z-2i}\,dz = \frac{2\pi i}{0!} e^{\pi z}\Big|_{z=2i} = 2\pi i e^{2\pi i} = 2\pi i$. A második tag szingularitásai az $\ln(-1)$ értékei. $-1 = 1(\cos\pi + i\sin\pi)$ trigonometrikus alakban, így $\ln(-1) = (2k+1)\pi i$, és ezek egyike sincs a körben (a legközelebbiekre $|\pi i - 2i| = (\pi - 2) > 1$, és $|-\pi i - 2i| = \pi + 2 > 1$), ezért a második tag integrálja 0, és összesítve $\displaystyle\oint_{\mathcal{G}} \frac{e^{\pi z}}{z-2i} + \frac{1}{e^z+1}\,dz = 2\pi i$.

b) $\displaystyle\frac{2\pi i}{4!}(\operatorname{ch} z)^{(4)}\Big|_{z=0} = \frac{\pi i}{12}\operatorname{ch} 0 = \frac{\pi i}{12}$. Mivel a körüljárás negatív, $\displaystyle\oint_{\mathcal{G}} \frac{\operatorname{ch} z}{z^5}\,dz = -\frac{\pi i}{12}$.

c) Az integrandus egyetlen szingularitása i, és ez az ellipszis belsejébe esik, mert $|-1+i| + |1+i| = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} < 4$.

$$\oint_{\mathcal{G}} \frac{\sin z}{(z-i)^3}\,dz = \frac{2\pi i}{2!}(\sin z)''\Big|_{z=i} = \pi i(-\sin z)\Big|_{z=i} = -\pi i \sin i = -\pi i^2 \operatorname{sh} 1 = \pi \operatorname{sh} 1.$$

3. *a)* $\displaystyle\oint_{\mathcal{G}} \frac{\cos z}{z^2+iz}\,dz$, *ahol* $\mathcal{G}$ *a* $-i$ *középpontú,* $\frac{1}{2}$ *sugarú kör, negatív körüljárással*

b) $\displaystyle\oint_{\mathcal{G}} \frac{1}{z(z^2-1)}\,dz$, *ahol* $\mathcal{G}:\ |z-1| = \frac{3}{2}$, *pozitív irányban*

c) $\displaystyle\oint_{\mathcal{G}} \frac{e^{\pi z}}{(z-i)^2(z+1)}\,dz$, *ahol* $\mathcal{G}$ *a* $-2, 1+2i, 1-2i$ *csúcsú háromszögvonal, pozitív irányban*

d) $\displaystyle\oint_{\mathcal{G}} \frac{1}{1+z^2}\,dz$, *ahol* $\mathcal{G}$ *a* $|z| = 2$ *egyenletű kör, pozitív irányban*

e) $\displaystyle\oint_{\mathcal{G}} \frac{e^z}{z^4-z^3}\,dz$, *ahol*$\mathcal{G}$ *a* $|z-2| = 3$ *egyenletű kör, pozitív irányban*

Megoldás: a) Az integrandus számlálója és nevezője reguláris, nevezője $z^2 + iz = z(z+i)$, tehát az integrandus szingularitásai 0 és $-i$. A 0 nincs benne a körben, tehát csak $-i$ körül kell használni a Cauchy-féle integrálformulát (a negatív körüljárásra is figyelve).

$$\oint_{\mathcal{G}} \frac{\cos z}{z(z+i)}\,dz = \oint_{\mathcal{G}} \frac{\frac{\cos z}{z}}{z+i}\,dz = -\frac{2\pi i}{0!} \cdot \frac{\cos z}{z}\Big|_{z=-i} = -2\pi i\frac{\cos(-i)}{-i} = 2\pi \operatorname{ch} 1.$$

b) Az integrandus szingularitásai $0, \pm 1$ (a nevező $z(z-1)(z+1)$, a számláló pedig reguláris), és ezek közül 0 és 1 vannak a körön belül, tehát az integrált helyettesíthetjük egy 0 körüli ($\mathcal{G}_0$) és egy 1 körüli ($\mathcal{G}_1$) kis körön vett integrál összegével.

$$\oint_{\mathcal{G}_0} \frac{1}{z(z^2-1)}\,dz = \oint_{\mathcal{G}_0} \frac{\frac{1}{z^2-1}}{z}\,dz = \frac{2\pi i}{0!}\frac{1}{z^2-1}\Big|_{z=0} = -2\pi i.$$

$$\oint_{\mathcal{G}_1} \frac{1}{z(z^2-1)}\,dz = \oint_{\mathcal{G}_0} \frac{\frac{1}{z^2+z}}{z-1}\,dz = \frac{2\pi i}{0!}\frac{1}{z^2+z}\Big|_{z=1} = \pi i.$$

Így a $\mathcal{G}$ körön vett integrál $-2\pi i + \pi i = -\pi i$.

c) Az integrandus szingularitásai i és -1, mindkettő benne van a megadott háromszögtartományban. Legyen $\mathcal{G}_i$ egy i körüli, $\mathcal{G}_{-1}$ egy -1 körüli kis kör.

$$\oint_{\mathcal{G}_i} \frac{e^{\pi z}}{(z-i)^2(z+1)}\,dz = \oint_{\mathcal{G}_i} \frac{\frac{e^{\pi z}}{z+1}}{(z-i)^2}\,dz = \frac{2\pi i}{1!}\left(\frac{e^{\pi z}}{z+1}\right)'\Big|_{z=i} =$$

$$= 2\pi i \frac{\pi e^{\pi z}(z+1) - e^{\pi z}}{(z+1)^2}\Big|_{z=i} = 2\pi i \frac{-\pi(1+i)+1}{(1+i)^2} = (\pi - \pi^2) - \pi^2 i.$$

$$\oint_{\mathcal{G}_{-1}} \frac{e^{\pi z}}{(z-i)^2(z+1)}\,dz = \oint_{\mathcal{G}_{-1}} \frac{\frac{e^{\pi z}}{(z-i)^2}}{z+1}\,dz = \frac{2\pi i}{0!}\frac{e^{\pi z}}{(z-i)^2}\Big|_{z=-1} = \pi e^{-\pi}.$$

Így $\mathcal{G}$-n az integrál $(\pi - \pi^2 + \pi e^{-\pi}) - \pi^2 i$.

d) Az integrandus szingularitásai $\pm i$ (a nevező $z^2+1 = (z+i)(z-i)$, a számláló reguláris), és mindkettő benne van a görbe által bezárt tartományban. Legyen $\mathcal{G}_i$ egy i körüli, $\mathcal{G}_{-i}$ egy $-i$ körüli kis kör.

$$\oint_{\mathcal{G}_i} \frac{1}{(z+i)(z-i)}\,dz = \oint_{\mathcal{G}_i} \frac{\frac{1}{z+i}}{z-i}\,dz = \frac{2\pi i}{0!}\frac{1}{z+i}\Big|_{z=i} = \pi.$$

$$\oint_{\mathcal{G}_{-i}} \frac{1}{(z+i)(z-i)}\,dz = \oint_{\mathcal{G}_{-i}} \frac{\frac{1}{z-i}}{z+i}\,dz = \frac{2\pi i}{0!}\frac{1}{z-i}\Big|_{z=-i} = -\pi.$$

Így $\mathcal{G}$-n az integrál 0.

e) Az integrandus szingularitásai 0 és 1 (e^z reguláris, és a nevező $z^4 - z^3 = z^3(z-1)$), és mindkettő benne van a körben, tehát az integrál felbontható egy 0 körüli és egy 1 körüli kis körön vett integrál összegére.

$$\oint_{\mathcal{G}_0} \frac{e^z}{z^3(z-1)}\,dz = \oint_{\mathcal{G}_0} \frac{\frac{e^z}{z-1}}{z^3}\,dz = \frac{2\pi i}{2!}\left(\frac{e^z}{z-1}\right)''\Big|_{z=0}.$$

$$\left(\frac{e^z}{z-1}\right)'' = \left(\frac{e^z(z-1)-e^z}{(z-1)^2}\right)' = \left(\frac{e^z(z-2)}{(z-1)^2}\right)' =$$

$$= \frac{\big(e^z(z-2)+e^z\big)(z-1)^2 - e^z(z-2)2(z-1)}{(z-1)^4},$$

aminek a 0-ban vett helyettesítési értéke -5, tehát az első integrál értéke $-5\pi i$.

$$\oint_{\mathcal{G}_1} \frac{e^z}{z^3(z-1)}\,dz = \oint_{\mathcal{G}_1} \frac{\frac{e^z}{z^3}}{(z-1)}\,dz = \frac{2\pi i}{0!}\cdot\frac{e^z}{z^3}\Big|_{z=1} = 2\pi e i.$$

Összesítve, $\displaystyle\oint_{\mathcal{G}} \frac{e^z}{z^4-z^3}\,dz = \pi(2e-5)i.$