1. *Állapítsuk meg a következő görbékről, hogy a megadott paraméterezésük ívhosszparaméteres-e! Határozzuk meg a görbék kísérő triéderét az adott paraméterértéknél!*

a) $\mathbf{r}(t) = (t+1,\ t^2,\ 2t-3),\ \ t_0 = 2$

b) $\mathbf{r}(t) = \left(\sin\frac{t}{3},\ \cos\frac{t}{3},\ \frac{\sqrt{8}}{3}t\right),\ \ t_0 = 0$

c) $\mathbf{r}(t) = (e^t - t)\mathbf{i} + e^{2t}\mathbf{j} - (2+e^{-t})\mathbf{k},\ \ t_0 = 0$

Megoldás: a) $\dot{\mathbf{r}}(t) = (1, 2t, 2)$, $|\dot{\mathbf{r}}(t)| = \sqrt{5+4t^2}$, tehát nem ívhosszparaméteres. $\ddot{\mathbf{r}}(t) = (0,2,0)$, $\dot{\mathbf{r}}(2) = (1,4,2)$, $\ddot{\mathbf{r}}(2) = (0,2,0)$, $\dot{\mathbf{r}}(2)\times\ddot{\mathbf{r}}(2) = (-4,0,2) = 2(-2,0,1)$, tehát $\mathbf{t}(2) = \frac{1}{\sqrt{21}}(1,4,2)$, $\mathbf{b}(2) = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,0,1)$, és $\mathbf{n}(2) = \mathbf{b}(2)\times\mathbf{t}(2) = \frac{1}{\sqrt{105}}(-2,0,1)\times(1,4,2) = \frac{1}{\sqrt{105}}(-4,5,-8)$.

b) $\dot{\mathbf{r}}(t) = \left(\frac{1}{3}\cos\frac{t}{3},\ -\frac{1}{3}\sin\frac{t}{3},\ \frac{\sqrt{8}}{3}\right)$, $|\dot{\mathbf{r}}(t)| = \sqrt{\frac{1}{9}\cos^2\frac{t}{3} + \frac{1}{9}\sin^2\frac{t}{3} + \frac{8}{3}} = \sqrt{\frac{1}{9}+\frac{8}{9}} = 1$, tehát ívhosszparaméteres, $t = s$.

$\mathbf{r}'(s) = \left(\frac{1}{3}\cos\frac{s}{3},\ -\frac{1}{3}\sin\frac{s}{3},\ \frac{\sqrt{8}}{3}\right)$, $\mathbf{r}''(s) = \left(-\frac{1}{9}\sin\frac{s}{3},\ -\frac{1}{9}\cos\frac{s}{3},\ 0\right)$, $\mathbf{t}(0) = \mathbf{r}'(0) = \left(\frac{1}{3},\ 0,\ \frac{\sqrt{8}}{3}\right)$,

$\mathbf{n}(0) = \dfrac{\mathbf{r}''(0)}{|\mathbf{r}''(0)|} = (0,-1,0)$, és $\mathbf{b}(0) = \mathbf{t}(0)\times\mathbf{n}(0) = \left(\frac{\sqrt{8}}{3},\ 0,\ -\frac{1}{3}\right)$.

c) $\dot{\mathbf{r}}(t) = (e^t - 1, 2e^{2t}, e^{-t})$, $|\dot{\mathbf{r}}(t)| = \sqrt{e^{2t} - 2e^t + 1 + 4e^{4t} + e^{-2t}}$ nem azonosan 1, így $\mathbf{r}(t)$ nem ívhosszparaméterezés.

$\ddot{\mathbf{r}}(t) = (e^t, 4e^{2t}, -e^{-t})$,

$\dot{\mathbf{r}}(0) = (0,2,1)$, $\ddot{\mathbf{r}}(0) = (1,4,-1)$, $\dot{\mathbf{r}}(0)\times\ddot{\mathbf{r}}(0) = (-6,1,-2)$,

így $\mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{41}}(-6,1,-2)$, $\mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{5}}(0,2,1)$, és $\mathbf{n} = \mathbf{b}\times\mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{205}}(5,6,-12)$.

2. *Írjuk föl az alábbi görbék megadott pontjában a simulósík egyenletét!*

a) $\mathbf{r}(t) = \dfrac{1}{t}\mathbf{i} + \dfrac{t}{t+1}\mathbf{j} - t\mathbf{k},\ \ t_0 = 1$

b) $\mathbf{r}(t) = (\cos^2 t,\ \sin 2t,\ \operatorname{tg} t),\ \ t_0 = \frac{\pi}{4}$

Megoldás: a) $\mathbf{r}(t) = \left(\dfrac{1}{t},\ \dfrac{t}{t+1},\ -t\right)$, $\mathbf{r}(1) = (1,\ \frac{1}{2},\ -1)$,

$\dot{\mathbf{r}}(t) = \left(-\dfrac{1}{t^2},\ \dfrac{1}{(t+1)^2},\ -1\right)$, $\dot{\mathbf{r}}(1) = (-1,\ \frac{1}{4},\ -1)$,

$\ddot{\mathbf{r}}(t) = \left(\dfrac{2}{t^3},\ -\dfrac{2}{(t+1)^3},\ 0\right)$, $\ddot{\mathbf{r}}(1) = (2,\ -\frac{1}{4},\ 0)$.

$\dot{\mathbf{r}}(1)\times\ddot{\mathbf{r}}(1) = (-\frac{1}{4}, -2, -\frac{1}{4})$, tehát ez, illetve az ezzel párhuzamos $(1,8,1)$ vektor normálvektora a simulósíknak, $(1, \frac{1}{2}, -1)$ pedig egy pontja. Így a simulósík egyenlete $(x-1)+8(y-\frac{1}{2})+(z+1) = 0$, azaz $x + 8y + z = 4$.

b) $\dot{\mathbf{r}}(t) = (-2\cos t\sin t,\ 2\cos 2t,\ 1+\operatorname{tg}^2 t) = (-\sin 2t,\ 2\cos 2t,\ 1+\operatorname{tg}^2 t)$, $\ddot{\mathbf{r}}(t) = \left(-2\cos 2t,\ -4\sin 2t,\ 2\operatorname{tg} t(1+\operatorname{tg}^2 t)\right)$. Így $\mathbf{r}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{2},1,1\right)$, $\dot{\mathbf{r}}\left(\frac{\pi}{4}\right) = (-1,0,2)$, $\ddot{\mathbf{r}}\left(\frac{\pi}{4}\right) = (0,-4,4)$, $\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}} = (8,4,4)\,||\,(2,1,1)$, tehát a simulósík normálvektora $(2,1,1)$, és a sík átmegy az $\left(\frac{1}{2},1,1\right)$ ponton, ezért az egyenlete $2x + y + z = 3$.

3. *Keressük meg az* $\mathbf{r}(t) = (t+1,\ t^2 - t,\ 2t)$ *görbének azokat a pontjait, ahol a normálsík párhuzamos az* $(1,1,1)$ *vektorral! Határozzuk meg itt a rektifikáló sík egyenletét!*

Megoldás: $\dot{\mathbf{r}}(t) = (1,\ 2t-1,\ 2)$ a normálsík normálvektora. A normálsík akkor párhuzamos az $(1,1,1)$ vektorral, ha a normálsík normálvektora merőleges rá, azaz $(1,\ 2t-1,\ 2)(1,1,1) = 2t+2 = 0$, vagyis $t = -1$. Itt

$\mathbf{r}(-1) = (0,2,-2)$

$\dot{\mathbf{r}}(-1) = (1,-3,2) \upuparrows \mathbf{t}$

$\ddot{\mathbf{r}}(-1) = (0,2,0)$

$\dot{\mathbf{r}}(-1)\times\ddot{\mathbf{r}}(-1) = (-4,0,2) \upuparrows \mathbf{b}$

így $\mathbf{n} = \mathbf{b}\times\mathbf{t} \upuparrows \left(\dot{\mathbf{r}}(-1)\times\ddot{\mathbf{r}}(-1)\right)\times\dot{\mathbf{r}}(-1) = (6,10,12)$. Tehát a rektifikáló sík egyik normálvektora az $\mathbf{n}$-nel párhuzamos $(3,5,6)$ vektor, a sík egyenlete pedig $3x + 5y + 6z = -2$.

4. *Számítsuk ki az alábbi görbék görbületét és torzióját a megadott helyen!*

a) $\mathbf{r}(t) = \left(\frac{1}{t},\ t^2,\ 2+t^2\right),\ t_0 = 1$

b) $\mathbf{r}(t) = (e^{-t},\ t,\ e^t),\ t_0 = 0.$

Megoldás: a) $\dot{\mathbf{r}}(t) = (-t^{-2},\ 2t,\ 2t),\ \dot{\mathbf{r}}(1) = (-1,\ 2,\ 2),\ |\dot{\mathbf{r}}(1)| = 3$

$\ddot{\mathbf{r}}(t) = (2t^{-3},\ 2,\ 2),\ \ddot{\mathbf{r}}(1) = (2,\ 2,\ 2),$

$\dddot{\mathbf{r}}(t) = (-6t^{-4},\ 0,\ 0),\ \dddot{\mathbf{r}}(1) = (-6,\ 0,\ 0),$

$\dot{\mathbf{r}}(1) \times \ddot{\mathbf{r}}(1) = (0,\ 6,\ -6),\ |\dot{\mathbf{r}}(1) \times \ddot{\mathbf{r}}(1)| = 6\sqrt{2},\ \dot{\mathbf{r}}(1)\ddot{\mathbf{r}}(1)\dddot{\mathbf{r}}(1) = 0,$

így a görbület $6\sqrt{2}/27 = 2\sqrt{2}/9$, a torzió pedig 0 (ez utóbbi abból is látszik, hogy a görbe kielégíti a $z - y = 2$ síkegyenletet).

b) $\dot{\mathbf{r}}(t) = (-e^{-t}, 1, e^t),\ \dot{\mathbf{r}}(0) = (-1, 1, 1),\ |\dot{\mathbf{r}}(0)| = \sqrt{3},$

$\ddot{\mathbf{r}}(t) = (e^{-t}, 0, e^t),\ \ddot{\mathbf{r}}(0) = (1, 0, 1)$

$\dddot{\mathbf{r}}(t) = (-e^{-t}, 0, e^t),\ \dddot{\mathbf{r}}(0) = (-1, 0, 1).$

$\dot{\mathbf{r}}(0) \times \ddot{\mathbf{r}}(0) = (1, 2, -1).$

Tehát $\kappa = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3} = \frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3},\quad \tau = \frac{\dot{\mathbf{r}}\ddot{\mathbf{r}}\dddot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|^2} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$ az adott pontban.

5. *Bizonyítsuk be, hogy az* $\mathbf{r}(t) = (\sin^2 t,\ \sin 2t,\ \cos^2 t)$ *görbe síkgörbe!*

Megoldás: A görbe kielégíti az $x + z = 1$ egyenletet (ui. $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ minden t-re), tehát rajta van az ilyen egyenletű síkon. De bizonyíthatjuk az állítást azzal is, ha belátjuk, hogy a torziója 0.

$\dot{\mathbf{r}} = (2\sin t\cos t,\ 2\cos 2t,\ -2\sin t\cos t) = (\sin 2t,\ 2\cos 2t, -\sin 2t)$

$\ddot{\mathbf{r}} = (2\cos 2t,\ -4\sin 2t, -2\cos 2t)$

$\dddot{\mathbf{r}} = (-4\sin 2t,\ -8\cos 2t, 4\sin 2t)$

$$\dot{\mathbf{r}}\ddot{\mathbf{r}}\dddot{\mathbf{r}} = \begin{vmatrix} \sin 2t & 2\cos 2t & -\sin 2t \\ 2\cos 2t & -4\sin 2t & -2\cos 2t \\ -4\sin 2t & -8\cos 2t & 4\sin 2t \end{vmatrix} = \sin 2t \cdot (-16) - 2\cos 2t \cdot 0 - \sin 2t \cdot (-16) = 0 \Rightarrow$$

$$\tau = \frac{\dot{\mathbf{r}}\ddot{\mathbf{r}}\dddot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|} = 0.$$

6. *Milyen felületet írnak le a következő egyenletek?*

a) $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$ *b)* $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ *c)* $z = x + y^2$

Megoldás: a) z értéke csak az (x, y) pontnak az origótól vett távolságától függ, tehát a felület forgásszimmetrikus a z tengelyre. Az xz síkkal vett metszete a $z = \frac{1}{x^2}$ „hiperbolaszerű" görbe (a végtelenekben 0-hoz, az 0-ban mindkét oldalról $+\infty$-hez tart), a felületet ennek a z tengely körüli körbeforgatásával kapjuk.

b) Ugyanúgy, mint az a)-nál, ez is forgásszimmetrikus a z tengelyre. A pontok z koordinátája megegyezik az xy síkra vett vetületük origótól vett távolságával, így a felületen levő pontok helyvektora mindig 45°-os szöget zár be az xy síkkal. Ez azt jelenti, hogy a felület egy z tengely körüli, felfelé nyíló végtelen kúp, amelynek alkotói 45°-os szöget zárnak be az xy síkkal, és így a kúp tengelyével is.

c) Rögzített $x = x_0$ értékre a $z = x_0 + y^2$ görbe egy parabola az yz koordinátasíkkal párhuzamos $x = x_0$ síkban, a parabola alsó pontja x_0 magasságban van az x tengely fölött. Tehát a felületet úgy kaphatjuk meg, hogy a $z = y^2$, $x = 0$ parabolát végigcsúsztatjuk az xz síkban levő, az x tengellyel 45°-os szöget bezáró $z = x$, $y = 0$ egyenesen.

7. *Paraméterezzük*

a) az $x + 2y + z = 5$ *egyenletű síkot;*

b) az origó középpontú, 2 sugarú gömbfelületet;

c) azt a ferde kúppalástot, amelynek alapja az $x^2 + y^2 = 1$ *egyenletű kör a* $z = 0$ *síkon, csúcsa pedig az* $(1, 2, 3)$ *pont;*

d) azt a felületet, amelyet a $z = \frac{1}{x}$, $x > 0$ *görbe z tengely körüli forgatásával kapunk!*

Megoldás: a) Válasszunk egy pontot a síkon, pl. $P_0(1,1,2)$, és két a síkkal párhuzamos, de egymással nem párhuzamos vektort, azaz az $\mathbf{n} = (1,2,1)$ normálvektorra merőleges vektorokat. Ilyenek például az $(1,0,-1)$ és $(0,1,-2)$ vektorok. A sík pontjainak helyvektorait ekkor az $\mathbf{r} = (1,1,2) + s(1,0,-1) + t(0,1,-2) = (1+s,\ 1+t,\ 2-s-2t)$ $(s,t \in \mathbb{R})$ paraméteres egyenlet adja meg.

b) A gömbi koordináták rögzített sugárral megadnak egy paraméterezést: $\mathbf{r}(\varphi,\vartheta) = (2\cos\varphi\sin\vartheta,\ 2\sin\varphi, \sin\vartheta,\ 2\cos\vartheta)$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \vartheta \le \pi$.

c) A kúppalástot lefedhetjük az alkotóival mint paramétervonalakkal. Ezek szakaszok, amelyeknek egyik végpontja az $A(1,2,3)$ pont, a másik az xy síkbeli egység sugarú körön levő $P_u(\cos u, \sin u, 0)$ pont. Ezeket paraméterezzük a v paraméterrel: $\mathbf{r}(u,v) = \overrightarrow{OA} + v\overrightarrow{AP_u} = (1,2,3) + v(-1+\cos u,\ -2+\sin u,\ -3) = (1-v+v\cos u,\ 2-2v+v\sin u,\ 3-3v)$ $(0 \le u \le 2\pi$, $0 \le v \le 1)$.

d) A felületet az xy-síkkal párhuzamos körökre bonthatjuk: u magasságban a kör sugara $1/u$, középpontja pedig $(0,0,u)$, így paraméterezése $\mathbf{r}(u,v) = (\frac{1}{u}\cos v,\ \frac{1}{u}\sin v,\ u)$, ahol $u > 0$, és $0 \le v \le 2\pi$.

8. *Határozzuk meg a következő felületek normálvektorát a megadott pontban! Írjuk fel az adott pontbeli érintősík egyenletét is!*

a) $\mathbf{r}(u,v) = (u^2 - 2v^2, u^3, v)$, $(u_0, v_0) = (1,1)$
b) $z = x^2y + 2y^2$, $P_0(2,1,6)$
c) $xy^2 + z^3 = 12$, $P_0(1,2,2)$
d) $z = y + \ln\frac{x}{2}$, $P_0(1,1,1)$
e) $\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{i}u + \mathbf{j}\cos u\sin v + \mathbf{k}\cos u\cos v$, $u_0 = \frac{\pi}{4}$, $v_0 = \frac{\pi}{3}$

Megoldás: a) $\mathbf{r}_u = (2u, 3u^2, 0)$, $\mathbf{r}_v = (-4v, 0, 1)$, és a normálvektor $(u_0,v_0) = (1,1)$-ben $(2,3,0) \times (-4,0,1) = (3,-2,12)$. Az érintősík átmegy az $\mathbf{r}(1,1) = (-1,1,1)$ helyvektorú ponton. Az egyenlete $3x - 2y + 12z = 7$.

b) A felület egyenlete $g(x,y,z) = z - x^2y - 2y^2 = 0$, így a g háromváltozós függvény gradiense a felület normálvektora: $(-2xy, -x^2 - 4y, 1)$, P_0-ban $(-4,-8,1)$. A $P_0(2,1,6)$ ponton átmenő, $(-4,-8,1)$ normálvektorú érintősík egyenlete $-4x - 8y + z = -10$.

c) A felület normálvektora a $g(x,y,z) = xy^2 + z^3 - 12$ gradiensének $(y^2, 2xy, 3z^2)$ P_0-beli értéke, $(4,4,12)$, vagy az ezzel párhuzamos $(1,1,3)$ vektor. A sík egyenlete $x + y + 3z = 9$.

d) $z_x = \frac{1}{x}$, $z_y = 1$, és így a normálvektor a P_0 pontban $(\frac{1}{x}, 1, -1) = (1,1,-1)$, az érintősík pedig $(x-1) + (y-1) - (z-1) = 0$, azaz $x + y - z = 1$.

e) $\mathbf{r}_u = (1,\ -\sin u\sin v,\ -\sin u\cos v)$, $\mathbf{r}_v = (0,\ \cos u\cos v,\ -\cos u\sin v)$, $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (\sin u\cos u,\ \cos u\sin v,\ \cos u\cos v)$, és ez az $u_0 = \frac{\pi}{4}$, $v_0 = \frac{\pi}{3}$ helyen $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}},\ \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},\ \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$, tehát ez, illetve a vele párhuzamos $(1, \sqrt{3}, 1)$ vektor normálvektora a felületnek az $\mathbf{r}(u_0,v_0) = \left(\frac{\pi}{4},\ \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},\ \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ pontban vett normálvektora, és itt az érintősík egyenlete $x + \sqrt{3}y + z = \frac{\pi}{4} + \sqrt{2}$.