1. *Számítsuk ki a megadott felületek felszínét!*

a) $\mathbf{r}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, 2v),\ \ 0 \le u \le 2,\ \ 0 \le v \le 2\pi$

b) $z = x^2 - y^2,\ \ x^2 + y^2 \le 1$

c) $x^2 = 2yz,\ \ 0 \le x \le 1,\ \ 1 \le y \le 2$

Megoldás: a) $\mathbf{r}_u = (\cos v,\ \sin v,\ 0),\ \ \mathbf{r}_v = (-u\sin v,\ u\cos v,\ 2),$

$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (2\sin v,\ -2\cos v,\ u),\ \ |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = \sqrt{4\sin^2 v + 4\cos^2 v + u^2} = \sqrt{4+u^2}.$

A felszín $\int_0^2 \int_0^{2\pi} \sqrt{1+u^2}\,dv\,du = \int_0^2 2\pi\sqrt{4+u^2}\,du$. Itt az $u = 2\operatorname{sh} t,\ \ du = 2\operatorname{ch} t\,dt$ helyettesítéssel megszabadulhatunk a négyzetgyöktől:

$2\pi \int_0^{\operatorname{arsh} 1} \sqrt{4+4\operatorname{sh}^2 t}\cdot 2\operatorname{ch} t\,dt = 2\pi \int_0^{\operatorname{arsh} 1} 4\operatorname{ch}^2 t\,dt = 2\pi \int_0^{\operatorname{arsh} 1} 2+2\operatorname{ch} 2t\,dt = 2\pi\Big[2t+\operatorname{sh} 2t\Big]_0^{\operatorname{arsh} 1} =$

$4\pi \operatorname{arsh} 1 + 4\pi\cdot\sqrt{2} = 4\pi\left(\ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}\right).$

b) $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \sqrt{4x^2+4y^2+1}\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{4r^2+1}\,r\,d\varphi\,dr = \int_0^1 2\pi r\sqrt{4r^2+1}\,dr =$

$\frac{\pi}{4}\int_0^1 8r(4r^2+1)^{1/2}\,dr = \frac{\pi}{4}\left[(4r^2+1)^{3/2}\cdot\frac{2}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1).$

c) $z = \dfrac{x^2}{2y},\ \ z_x = \dfrac{x}{y},\ \ z_y = -\dfrac{x^2}{2y^2},$

$$\sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1} = \sqrt{\frac{x^2}{y^2} + \frac{x^4}{4y^4} + 1} = \sqrt{\frac{x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4}{4y^4}} = \frac{x^2+2y^2}{2y^2} = 1 + \frac{x^2}{2y^2},$$

és a felszín $\displaystyle\int_1^2\int_0^1 1 + \frac{x^2}{2y^2}\,dx\,dy = \int_1^2 \left[x + \frac{x^3}{6y^2}\right]_0^1 dy = \int_1^2 1 + \frac{1}{6y^2}\,dy = \left[y - \frac{1}{6y}\right]_1^2 = \frac{13}{12}.$

2. *Számítsuk ki a görbementi integrálokat (ha szükséges, előbb paraméterezzük a görbét)!*

a) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (x^2,\ x+y+z,\ yz)$, *$\mathcal{G}$ az AB szakasz A-ból B-be, ahol $A(1,1,1)$ és $B(2,0,-1)$.*

b) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (y^2 - x^2)\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} - x^2\mathbf{k}$, $\mathcal{G} : \mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3),\ \ (0 \le t \le 1)$

c) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r},\ \ \mathcal{G} : x^2 + y^2 = 1$, *kör $x \ge 0$ féltérbe eső része, $(0,1)$-nél kezdve*

d) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (e^x,\ xyz,\ z),\ \ \mathbf{r}(t) = (t^2,\ 1,\ \cos t),\ \ 0 \le t \le \pi$

Megoldás: a) $\mathcal{G} :\ \mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} = (1+t, 1-t, 1-2t),\ \ (0 \le t \le 1),\ \ \dot{\mathbf{r}}(t) = (1,-1,-2),$

$\mathbf{v}(\mathbf{r}(t)) = ((1+t)^2,\ 3-2t,\ 2t^2-3t+1)$, és $\mathbf{v}(\mathbf{r}(t))\dot{\mathbf{r}}(t) = -3t^2 + 10t - 4.$

$\int_{\mathcal{G}} \mathbf{v}(\mathbf{r})\,\mathbf{dr} = \int_0^1 -3t^2 + 10t - 4 = \left[-t^3 + 5t^2 - 4t\right]_0^1 = 0.$

b) $\dot{\mathbf{r}}(t) = (1,\ 2t,\ 3t^2),\ \ \mathbf{v}(\mathbf{r}(t)) = (t^4 - t^2,\ 2t^5,\ -t^2),\ \ \mathbf{v}(\mathbf{r}(t))\dot{\mathbf{r}}(t) = 4t^6 - 2t^4 - t^2,$

$\int_{\mathcal{G}} \mathbf{v}(\mathbf{r})\,\mathbf{dr} = \int_0^1 4t^6 - 2t^4 - t^2\,dt = -\frac{17}{105}.$

c) $\mathcal{G}\ :\ \ \mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, ahol $\frac{\pi}{2} \ge t \ge -\frac{\pi}{2}$, $\dot{\mathbf{r}}(t) = (-\sin t, \cos t)$, $\mathbf{v}(\mathbf{r}(t)) = (\cos t, \sin t)$, $\mathbf{v}(\mathbf{r}(t))\dot{\mathbf{r}}(t) = -\cos t\sin t + \sin t\cos t = 0$, így az integrálja is 0. (Ezt egyébként előre lehetett tudni abból, hogy a vektormező a kör sugara, ami mindenhol merőleges az értintőre, tehát az érintővektorra vett vetülete végig 0.)

d) $\mathbf{v}(\mathbf{r}(t)) = (e^{t^2},\ t^2\cos t,\ \cos t)$, $\dot{\mathbf{r}}(t) = (2t, 0, -\sin t)$, $\mathbf{v}(\mathbf{r}(t))\dot{\mathbf{r}}(t) = 2te^{t^2} - \sin t\cos t$, és az integrál $\int_0^\pi 2te^{t^2} - \sin t\cos t\,dt = \left[e^{t^2} + \frac{1}{2}\cos^2 t\right]_0^\pi = e^{\pi^2} - 1.$

3. *Bizonyítsuk be, hogy az alábbi vektor-vektorfüggvények potenciálosak. Számítsuk ki a megadott integrálokat a potenciálfüggvény segítségével!*

a) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (y^2 - z^2,\ 1 + 2xy,\ -2xz),\ \ \mathcal{G} : (2\cos t,\ 2\sin t,\ t),\ \ 0 \le t \le \pi)$

b) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (y+z,\ x+z,\ x+y)$, *$\mathcal{G}$ az $ABCD$ töröttvonal, ahol $A(1,1,1)$, $B(1,2,0)$, $C(3,2,1)$, $D(3,1,2)$.*

Megoldás: a) $\mathbf{rot\,v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 - z^2 & 1 + 2xy & -2xz \end{vmatrix} =$

$= \Big(\frac{\partial}{\partial y}(-2xz) - \frac{\partial}{\partial z}(1+2xy),\ \frac{\partial}{\partial z}(y^2-z^2) - \frac{\partial}{\partial x}(-2xz),\ \frac{\partial}{\partial x}(1+2xy) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2-z^2)\Big) =$
$= (0-0,\ -2z+2z,\ 2y-2y) = \mathbf{0}$, ezért $\mathbf{v}$-nek van potenciálfüggvénye. Ha u a potenciálfüggvény, akkor $u_x = y^2 - z^2 \Rightarrow u = \int y^2 - z^2\,dx = xy^2 - xz^2 + g(y,z)$ valamely x-től nem függő $g(y,z)$ függvényre. Így $u_y = 2xy + g_y(y,z)$, másrész $u_y = 1 + 2xy$, tehát $g_y(y,z) = 1$, amiből $g(y,x) = y + h(z)$, tehát $u = xy^2 - xz^2 + y + h(z)$. Végül $u_z = -2xz - h'(z) = -2xz \Rightarrow h'(z) = 0$ $\Rightarrow h(z)$ konstans. A $\mathbf{v}$ potenciálfüggvényei $u = xy^2 - xz^2 + y + C$. A görbe két végpontja $\mathbf{r}(0) = (2,0,0)$ és $\mathbf{r}(\pi) = (-2,0,\pi)$, amiből az integrál értéke $\Big[xy^2 - xz^2 + y\Big]_{(2,0,0)}^{(-2,0,\pi)} = 2\pi^2$.

b) A $\mathbf{v}$ vektor-vektorfüggvény egy potenciálfüggvénye $u = xy + xz + yz$, így $\int_{\mathcal{G}} \mathbf{v}(\mathbf{r})\,\mathbf{dr} = \Big[xy + xz + yz\Big]_{(1,1,1)}^{(3,1,2)} = 11 - 3 = 8$.

4. *Számítsuk ki az alábbi függvények divergenciáját és rotációját!*

a) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \left(\frac{x}{y},\ \frac{y}{x},\ xz\right)$
b) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{grad}\,|\mathbf{r}|$
c) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (x^2 + y^3,\ 12xy - 3x,\ xyz^2)$
d) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (x^2y + y^3,\ x^3 - xy^2)$

Megoldás: a) $\operatorname{div}\mathbf{v} = \frac{1}{y} + \frac{1}{x} + x$, $\mathbf{rot\,v} = \Big(0,\ -z,\ -\frac{y}{x^2} + \frac{x}{y^2}\Big)$.

b) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{grad}\,|\mathbf{r}| = \mathbf{grad}\,\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$.
$\frac{\partial}{\partial x}\left(x(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}\right) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2} + x(-\frac{1}{2})(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\cdot 2x = \frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, és hasonlóan kapjuk a másik két tag megfelelő deriváltját, tehát $\operatorname{div}\mathbf{v} = \frac{(y^2+z^2)+(x^2+z^2)+(x^2+y^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Mivel $\mathbf{rot\,grad\,w} = \mathbf{0}$ minden $\mathbf{w}$ vektor-vektorfüggvényre, ami kétszer folytonosan differenciálható, $\mathbf{v} = \mathbf{grad}\,|\mathbf{r}|$-re $\mathbf{rot\,v} = \mathbf{0}$.

c) $\operatorname{div}\mathbf{v} = 2x + 12x + 2xyz = 14x + 2xyz$, $\mathbf{rot\,v} = (xz^2, -yz^2, 12y - 3 - 3y^2)$

d) $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$, $\mathbf{rot\,v} = (0,\ 0,\ 2x^2 - 4y^2)$ (a $\mathbf{v}$ függvényt $\mathbf{v} = (x^2y + y^3, x^3 - xy^2, 0)$ alakban $\mathbb{R}^3$-belinek tekintve)

5. *Keressük meg a következő vektor-vektorfüggvények potenciálfüggvényét, ha léteznek!*

a) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (3x^2y - y^3)\mathbf{i} + (x^3 - 3xy^2)\mathbf{j}$
b) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (5x^2y - 4xy,\ 3x^2 - 2y)$
c) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (yz,\ xz,\ xy)$
d) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (yz - xy,\ xz - \frac{1}{2}x^2 + yz^2,\ xy + y^2z)$

Megoldás: a) Olyan $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényt keresünk, amelyre $u_x = 3x^2y - y^3$, és $u_y = x^3 - 3xy^2$. Az elsőből $u = \int 3x^2y - y^3\,dx = x^3y - xy^3 + g(y)$, és erre $u_y = x^3 - 3xy^2 + g'(y) = x^3 - 3xy^2$, tehát $g'(y) = 0$, és $g(y) = C$ konstans. Így $u = x^3y - xy^3 + C$.

b) A keresztbe vett deriváltak nem egyeznek meg: $\frac{\partial}{\partial y}(5x^2y - 4xy) = 5x^2 - 4x$ és $\frac{\partial}{\partial x}(3x^2 - 2y) = 6x$, ezért ennek a vektor-vektorfüggvénynek nincs potenciálfüggvénye.

c) Ha $\mathbf{grad}\,u = \mathbf{v}(\mathbf{r}) = (yz,\ xz,\ xy)$, akkor $u_x = yz \Rightarrow u = xyz + \ldots$, ahol a $\ldots$ nem függ x-től. De $u = xyz$-re $u_y = xz = v_2$ és $u_z = yz = v_3$ is igaz, ezért $u = xyz$ potenciálfüggvénye $\mathbf{v}$-nek.

d) Olyan $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ függvényt keresünk, amelyre $u_x = yz - xy$, $u_y = xz - \frac{1}{2}x^2 + yz^2$, $u_z = xy + y^2z$. Az elsőből $u = \int yz - xy\,dx = xyz - \frac{1}{2}x^2y + g(y,z)$, amire $u_y = xz - \frac{1}{2}x^2 + g_y(y,z) = xz - \frac{1}{2}x^2 + yz^2$, tehát $g_y(y,z) = yz^2$, így $g(y,z) = \int yz^2\,dy = \frac{1}{2}y^2z^2 + h(z)$. Visszahelyettesítve az u-ba: $u = xyz - \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}y^2z^2 + h(z)$. Ezt összevetjük a harmadik feltétellel: $u_z = xy + y^2z + h'(z) = xy + y^2z$, amiből $h'(z) = 0$, azaz $h(z) = C$ konstans, tehát $u = xyz - \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}y^2z^2 + C$.