1. *Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenletek típusát (explicit-e vagy implicit, milyen rendű, illetve fokú, homogén vagy inhomogén)!*

a) $3y''' - (\operatorname{tg} x)y' + \operatorname{ch} x = 0$ *b)* $y'' = e^y \ln x$ *c)* $y'' = y^2 \cos^2 x$

Megoldás: a) Implicit, harmadrendű, elsőfokú (azaz lineáris), inhomogén.

b) Explicit, másodrendű, nincs foka.

c) Explicit, másodrendű, másodfokú, homogén.

2. *Oldjuk meg a következő (szétválasztható) differenciálegyenleteket, illetve kezdetiérték-problémákat!*

a) $xyy' + y^2 - 1 = 0$

b) $(2x+1)y' - 3y = 0, \ \ y(4) = 6$

c) $(1+x^2)y' + x(1+y^2) = 0$

d) $\sqrt{1-x^2}y' + xy = 0$ *az* $y(\frac{1}{2}) = 0$, *illetve az* $y(\frac{3}{5}) = 1$ *kezdeti feltétellel*

Megoldás: a)

$$\begin{aligned}
y'\frac{y}{1-y^2} =& \frac{1}{x} \qquad \text{vagy} \quad y \equiv \pm 1 \\
\int \frac{y}{1-y^2}\,dy =& \int \frac{1}{x}\,dx \\
-\frac{1}{2}\ln|1-y^2| =& \ln|x| + C \\
\ln\frac{1}{\sqrt{|1-y^2|}} =& \ln e^C|x| \\
1-y^2 =& \frac{A}{x^2}, \quad \text{ahol } A \in \mathbb{R} \text{ tetsz.} \\
y =& \pm\sqrt{1-\frac{A}{x^2}} \qquad (A \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\frac{y'}{y} =& \frac{3}{2x+1} \qquad \text{vagy} \quad y \equiv 0 \\
\int \frac{1}{y}\,dy =& \int \frac{3}{2x+1}\,dx \\
\ln|y| =& \frac{3}{2}\ln|2x+1| + C \\
y =& A \cdot |2x+1|^{3/2}
\end{aligned}$$

Az $y(4) = 6$ kezdeti feltétel miatt $6 = a \cdot 9^{3/2} = 27A \Rightarrow A = \frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{9}(2x+1)^{3/2}$ (mert $x = 4$ környezetében $2x+1 > 0$, tehát $|2x+1| = 2x+1$).

c)

$$\begin{aligned}
\frac{y'}{1+y^2} =& -\frac{x}{1+x^2} \\
\int \frac{1}{1+y^2}\,dy =& \int -\frac{x}{1+x^2}\,dx \\
\operatorname{arctg}(y) =& -\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C
\end{aligned}$$

$$y = \operatorname{tg}\left(-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C\right) = \operatorname{tg}\ln\frac{A}{\sqrt{1+x^2}},$$

ahol $A = e^C > 0$.

d)

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y} &= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \text{ vagy } y \equiv 0\\ \int \frac{1}{y}\,dy &= \int -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \qquad ,\\ \ln|y| &= \sqrt{1-x^2}+C\\ y &= Ae^{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

ahol $A = \pm e^C$ tetszőleges nem 0 szám, vagy $A = 0$ a szinguláris megoldás miatt. Az $y(\frac{1}{2}) = 0$ kezdeti feltételt az $y \equiv 0$ megoldás, az $y(\frac{3}{5}) = 1$ kezdeti feltételt az $y = e^{-4/5}e^{\sqrt{1-x^2}}$ megoldás elégíti ki.

3. *Ha a differenciálegyenlet $y' = g(y/x)$ alakra hozható, akkor $z = y/x$ függvény bevezetésével szétválaszthatóvá tehető. Oldjuk meg ennek segítségével az alábbi differenciálegyenleteket!*

a) $2xyy' = y^2 - x^2, \ \ y(1) = 1$

b) $xy' = xe^{y/x} + y, \ \ y(1) = 0$

Megoldás: a) A differenciálegyenlet $y' = \frac{y}{2x} - \frac{x}{2y} = \frac{1}{2}(\frac{y}{x}) - \frac{1}{2}(\frac{y}{x})^{-1}$ alakra hozható, így alkalmazhatjuk a $z = \frac{y}{x}$, azaz $zx = y$ helyettesítést, amelynél $z'x + z = y'$, tehát a differenciálegyenlet $z'x + z = \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}z^{-1}$.

$$z' \cdot \frac{2}{z+z^{-1}} = -\frac{1}{x}$$

(A kezdeti érték közelében x, y, és így z is pozitív, tehát nem kell foglalkozni azzal, hogy osztottunk-e 0-val.)

$$\begin{aligned}z'\frac{2z}{z^2+1} &= -\frac{1}{x}\\ \int \frac{2z}{z^2+1}\,dz &= \int -\frac{1}{x}\,dx\\ \ln(z^2+1) &= -\ln|x| + C = \ln\frac{e^c}{|x|}\\ z^2+1 &= \frac{A}{x} \quad (A \neq 0)\\ \frac{y^2}{x^2}+1 &= \frac{A}{x}\\ y &= \pm\sqrt{Ax-x^2}\end{aligned}$$

Az $y(1) = 1$ feltételből $A = 2$, és $y = \sqrt{2x-x^2}$.

b) A differenciálegyenlet $y' = e^{y/x} + \frac{y}{x}$ alakra hozható. $z = y/x$, azaz $y = zx$ helyettesítésnél $y' = z'x + z$.

$$\begin{aligned} z'x + z =& e^z + z \\ z'e^{-z} =& \frac{1}{x} \\ \int e^{-z}\, dz =& \int \frac{1}{x}\, dx \\ -e^{-z} =& \ln|x| + C \\ z =& -\ln(-\ln|x| - C)) \end{aligned}$$

Mivel az $x = 1$ környékén érvényes megoldást keressük, a $z = -\ln(-\ln x - C)$ lesz a megfelelő. Ebből $y = -x\ln(-\ln x - C)$. Az $y(1) = 0$ feltételt a $C = -1$ elégíti ki: $y = -x\ln(1 - \ln x)$.

4. *Oldjuk meg a következő elsőrendű lineáris differenciálegyenleteket!*

a) $y' - \dfrac{1}{x}y = x^2$

b) $y' + y = e^{-x}$

c) $y' + y\cos x = \sin x\cos x, \;\; y(0) = 1$

d) $xy' - (x+1)y = x^2 - x^3$

Megoldás: Bármelyik egyenletet megoldhatjuk multiplikátorral vagy állandók variálásával is. a) Multiplikátorral: Az $y' + p(x)y = q(x)$ egyenletet $e^{P(x)}$-szel kell beszorozni, ahol $P'(x) = p(x)$. Ekkor az egyenlet bal oldala $\left(e^{P(x)}y\right)'$ lesz.
$p(x) = -\frac{1}{x}, \;\; P(x) = -\ln x = \ln\frac{1}{x}, \;\; e^{P(x)} = \frac{1}{x}.$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y =& x \\ \left(\frac{1}{x}y\right)' =& x \\ \frac{y}{x} =& \int x\, dx = \frac{1}{2}x^2 + C \\ y =& \frac{1}{2}x^3 + Cx \end{aligned}$$

Állandók variálásával:
A homogén differenciálegyenlet: $y' - \frac{1}{x}y = 0$

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} =& \frac{1}{x} \quad \text{vagy} \quad y \equiv 0 \\ \int \frac{1}{y}\, dy =& \int \frac{1}{x}\, dx \\ \ln|y| =& \ln|x| + C \\ y =& Ax \;\; (A \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Az inhomogén megoldását $y = A(x)x$ alakban keressük.

$$\begin{aligned} y' =& A'(x) + A(x) \\ A'(x)x + A(x) - A(x) =& x^2 \\ A'(x) =& x \\ A(x) =& \int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + c \\ y =& \frac{1}{2}x^3 + cx. \end{aligned}$$

b) Multiplikátorral:
$p(x) = 1$, $P(x) = x$, $e^{P(x)} = e^x$.

$$\begin{aligned} e^x y' + e^x y =& 1 \\ (e^x y)' =& 1 \\ e^x y =& \int 1\,dx = x + C \\ y =& e^{-x}(x + C) = e^{-x}x + Ce^{-x}. \end{aligned}$$

(Az állandók variálásánál a homogén d.e. megoldása $A \cdot e^{-x}$ lenne, az inhomogén megoldását $y = A(x)e^{-x}$ alakban keressük, és $A(x)$-re $x + c$ jön ki.)

c) A megfelelő homogén differenciálegyenlet, $y' + y\cos x = 0$, azaz $\dfrac{y'}{y} = -\cos x$ (ha $y \not\equiv 0$), és ebből $\ln|y| = C - \sin x$ azaz $y = Ae^{-\sin x}$, ahol $A \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Az inhomogén differenciálegyenlet megoldását az állandó variálásával $y = A(x)e^{-\sin x}$ alakban keressük. Behelyettesítve az eredeti egyenletbe: $A'(x)e^{-\sin x} - A(x)(\cos x)e^{-\sin x} + A(x)e^{-\sin x}\cos x = \sin x \cos x$, azaz $A'(x)e^{-\sin x} = \sin x \cos x$, amiből $A'(x) = e^{\sin x}\sin x \cos x$. Ebből $A(x) = \int e^{\sin x}\sin x\cos x\,dx = \int ue^u\,du$, ha $u = \sin x$ helyettesítést végzünk. Ez parciális integrálással: $\int ue^u\,du = ue^u - \int e^u\,du = (u-1)e^u + c = (-1 + \sin x)e^{\sin x} + c$, és $y = A(x)e^{-\sin x} = -1 + \sin x + ce^{-\sin x}$. A kezdeti feltételt az $y = -1 + \sin x + 2e^{-\sin x}$ függvény elégíti ki.
(Ha multiplikátorral oldjuk meg, akkor $e^{\sin x}$-szel kell beszorozni a differenciálegyenletet.)

d) A megfelelő homogén differenciálegyenlet $\dfrac{y'}{y} = 1 + \dfrac{1}{x}$ alakra hozható ($y \not\equiv 0$ esetén), és a megoldása $\ln|y| = x + \ln|x| + C$, azaz $\ln|y| = \ln e^x e^C|x|$, tehát $y = Axe^x$. Az inhomogén differenciálegyenlet megoldását az állandó variálásával $y = A(x)xe^x$ alakban keressük. Behelyettesítés után

$$A'(x)x^2e^x + A(x)xe^x + A(x)x^2e^x - (x+1)A(x)xe^x = x^2 - x^3, \text{ azaz}$$

$$A'(x) = e^{-x} - xe^{-x}, \text{ és így}$$

$$A(x) = \int e^{-x} - xe^{-x}\,dx = -e^{-x} + xe^{-x} - \int e^{-x}\,dx = xe^{-x} + c, \text{ tehát}$$

$$y = x^2 + cxe^x.$$

(Ha multiplikátorral oldjuk meg, az

$$y' - \frac{x+1}{x}y = x - x^2$$

alakú d.e.-ből kell kiindulnunk, itt $p(x) = -\frac{x+1}{x} = 1+\frac{1}{x}$, és $\int 1+\frac{1}{x}\,dx = x+\ln|x|+C$, tehát $e^{x+\ln x} = e^x x$-szel kell beszoroznunk a d.e.-et.)

5. *Ellenőrizzük, hogy az alábbi differenciálegyenletek egzaktak-e. Ha nem, keressünk alkalmas multiplikátort, amellyel egzakttá tehetők, és úgy oldjuk meg!*

a) $x^3 - 3xy^2 + (y^2 - 3x^2y)y' = 0$
b) $\ln y + ye^x + 2 + (\frac{x}{y} + e^x - \operatorname{ch} y)y' = 0$
c) $(1 - xy) + (xy - x^2)y' = 0$
d) $(y\sin x - 1) + y'\cos x = 0$
e) $x(y^2 + 1) + y(1 - x^2)y' = 0$
f) $2x + \cos y - (x\sin y)y' = 0,\ \ y(1) = 0$
g) $e^{-y} + (xe^{-y} - 2ye^{-2y})y' = 0$

Megoldás: a) $P = x^3 - 3xy^2,\ \ P_y = -6xy,$
$Q = y^2 - 3x^2y,\ \ Q_x = -6xy.$
Mivel $P_y = Q_x$, a d.e. egzakt, és olyan $u(x,y)$ függvényt kell keresnünk, amelyre $u_x = P = x^3 - 3xy^2$ és $u_y = Q = y^2 - 3x^3y$.
$u = \int x^3 - 3xy^2\,dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2y^2 + g(y),$
$u_y = -3x^2y + g'(y) = y^2 - 3x^2y \ \Rightarrow\ g'(y) = y^2 \ \Rightarrow\ g(y) = \frac{1}{3}y^3 + c$. Tehát $u = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{1}{3}y^3$ megfelel, és a differenciálegyenlet megoldása az

$$\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{1}{3}y^3 = C$$

implicit egyenlettel megadott y függvény, tetszőleges C konstansra.

b) $P(x,y) = \ln y + ye^x + 2,\ \ Q(x,y) = \frac{x}{y} + e^x - \operatorname{ch} y,\ \ P_y = \frac{1}{y} + e^x,\ \ Q_x = \frac{1}{y} + e^x.$ Mivel $P_y = Q_x$, a differenciálegyenlet egzakt, és a megoldása $u(x,y) = C$, ahol u a $(P(x,y), Q(x,y))$ vektor-vektorfüggvény egyik potenciálfüggvénye. $u_x = P$-ből $u = x\ln y + ye^x + 2x + g(y)$ valamely $g(y)$ függvényre, és $u_y = \frac{x}{y} + e^x + g'(y) = \frac{x}{y} + e^x - \operatorname{ch} y$, tehát $g(y) = -\operatorname{sh} y$, és ezzel $u(x,y) = x\ln y + ye^x + 2x - \operatorname{sh} y$ megfelelő. A differenciálegyenlet y megoldását az $x\ln y + ye^x + 2x - \operatorname{sh} y = C$ implicit egyenlet adja meg tetszőleges C konstanssal.

c) $P = 1 - xy,\ \ P_y = -x,\ \ Q = xy - x^2,\ \ Q_x = y - 2x,\ \ P_y \neq Q_x$, tehát a d.e. nem egzakt.
$P_y - Q_x = x - y$, és $\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{x-y}{x(y-x)} = -\frac{1}{x}$ csak x-től függ, ezért van x-től függő $M(x)$ multiplikátor, amelyre $\ln M(x) = \int -\frac{1}{x}\,dx = -\ln|x| + c$, azaz $M(x) = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$ megfelel.
$(\frac{1}{x} - y) + (y - x)y' = 0$ már egzakt: itt $P = \frac{1}{x} - y$, $P_y = -1,\ \ Q = y - x$, $Q_x = -1$ $\Rightarrow\ \ P_y = Q_x$.
Keresünk egy olyan $u(x,y)$ függvényt, amelyre $u_x = \frac{1}{x} - y$ és $u_y = y - x$. Ilyen az $u = \ln|x| - xy + \frac{1}{2}y^2$. Tehát a d.e. megoldása $\ln|x| - xy + \frac{1}{2}y^2 = C$.

d) *1. megoldás:* $P(x,y) = y\sin x - 1,\ \ Q(x,y) = \cos x,\ \ P_y = \sin x,\ Q_x = -\sin x$, tehát az egyenlet nem egzakt. $\dfrac{P_y - Q_x}{Q} = \dfrac{2\sin x}{\cos x}$ csak x-től függ, tehát van $M(x)$ multiplikátor. Erre

$$\ln M(x) = \int \frac{2\sin x}{\cos x}\,dx = -2\ln(\cos x) + c = \ln\frac{1}{\cos^2 x} + c,$$

tehát $M(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ megfelelő. Ezzel végigszorozva az egyenletet:

$$y\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} + y'\frac{1}{\cos x} = 0,$$

ami már valóban egzakt. Az új egyenlethez tartozó $u(x, y)$ függvényre $u_x = y\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}$, és $u_y = \frac{1}{\cos x}$, aminek az egyik megoldása $u = \frac{y}{\cos x} - \operatorname{tg} x$, tehát a differenciálegyenlet y megoldása az $\frac{y}{\cos x} - \operatorname{tg} x = C$, azaz $y = \sin x + C\cos x$.

2. megoldás: A differenciálegyenlet lineáris, és a hozzá tartozó homogén lineáris $y'\cos x + y\sin x = 0$ differenciálegyenlet y megoldására $\ln|y| = \int -\frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \ln\cos x + C$, amiből $y = A\cos x$. Az inhomogén differenciálegyenlet megoldása $y = A(x)\cos x$ alakú, ahol $A'(x)\cos^2 x - A(x)\sin x\cos x + A(x)\cos x\sin x = 1$, azaz $A(x) = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + c$, és így $y = \sin x + c\cos x$.

e) A differenciálegyenlet nem egzakt, $\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{4xy}{y(1-x^2)} = \frac{4x}{1-x^2}$ csak x-től függő, és így ad egy $M(x)$ multiplikátort, amelyre $\ln M(x) = \int \frac{4x}{1-x^2}\,dx = -2\ln(1-x^2) + c = \ln\frac{1}{(1-x^2)^2} + c$, vagyis ($c = 0$-val) $M(x) = \frac{1}{(1-x^2)^2}$. Ezzel végigszorozva a differenciálegyenletet:

$$(y^2+1)\frac{x}{(1-x^2)^2} + \frac{y}{1-x^2}y' = 0.$$

Ennek az egzakt differenciálegyenletnek a megoldását annak az $u(x, y)$ függvénynek a segítségével tudjuk kifejezni, amelyre

$$u_x = (y^2+1)\frac{x}{(1-x^2)^2} \text{ és } u_y = \frac{y}{1-x^2}.$$

Ennek az egyik megoldása $u = \frac{1+y^2}{1-x^2}$, így a differenciálegyenlet y megoldására

$$\frac{1+y^2}{1-x^2} = C, \text{ azaz } y = \pm\sqrt{C(1-x^2)-1}.$$

f) A differenciálegyenlet egzakt, az $u_x = 2x + \cos y$, $u_y = -x\sin y$ feltételeket kielégítő egyik u függvény $x^2 + x\cos y$, tehát a differenciálegyenlet általános megoldása

$$x^2 + x\cos y = C.$$

Az $y(1) = 0$ feltétel $1 + 1 = C$ esetén teljesül ($x = 1$, $y = 0$-t helyettesítünk az egyenletbe), tehát $x^2 + x\cos y = 2$, azaz

$$y = \arccos\frac{2-x^2}{x}.$$

g) A differenciálegyenlet nem egzakt, $P_y = -e^{-y}$, $Q_x = e^{-y}$, és $\dfrac{P_y - Q_x}{Q} = \dfrac{-2e^{-y}}{xe^{-y} - 2ye^{-2y}} = \dfrac{-2}{x - 2ye^{-y}}$ nem csak x-től függ, tehát nincs $M(x)$ multiplikátor. Viszont $\dfrac{Q_x - P_y}{P} = \dfrac{2e^{-y}}{e^{-y}} = 2$ csak (legföljebb) y-tól függ, tehát $N(y)$ multiplikátor létezik: $\ln N(y) = \int 2\,dy = 2y + c$ miatt $N(y) = e^{2y}$ megfelel. A differenciálegyenletet ezzel végigszorozva az

$$e^y + (xe^y - 2y)y' = 0$$

egzakt differenciálegyenletet kapjuk. Ennek megoldását az $u(x,y) = xe^y - y^2$ függvényből az

$$xe^y - y^2 = C$$

implicit egyenlet adja.