1. *Vezessük vissza elsőrendűre, és úgy oldjuk meg az alábbi hiányos másodrendű differenciálegyenleteket!*

a) (Pt 28/119) $xy'' - y' = x^2 \sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$

b) (Pt 28/105) $2yy'' = (y')^2$

c) (Pt 28/111) $2y'' + (y')^3 = 0$

d) (Pt 28/109) $(x \ln x)y'' - y' = x \ln^2 x$

e) (Pt 28/104) $y''(1 + y^2) = y(y')^2, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1$

Megoldás: a) Vezessük be a $z = y'$ helyettesítést. Ekkor $y'' = z'$, és a differenciálegyenlet $xz' - z = x^2 \sin x$ alakú elsőrendű lineáris lesz. A $z' - \frac{1}{x}z = x \sin x$ alakból látszik, hogy $e^{\int -\frac{1}{x}\,dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$-szel megszorozva $\frac{1}{x}z' - \frac{1}{x^2}z = \left(\frac{1}{x}z\right)' = \sin x$, tehát $\frac{1}{x}z = \int \sin x\,dx = -\cos x + C$, amiből $y' = z = -x\cos x + Cx$. Az $y'(\frac{\pi}{2}) = \pi$ feltétel miatt $C = 2$, és $y = \int -x\cos x + 2x\,dx = -x\sin x + \int \sin x\,dx + x^2 = -x\sin x - \cos x + x^2 + c$, és a másik kezdeti feltétel miatt ez $-x\sin x - \cos x + x^2 + \frac{\pi}{2}$.

b) Ebből a másodrendű differenciálegyenletből az x hiányzik, tehát az $y' = p(y)$ helyettesítést érdemes elvégezni, amelynél $y'' = p(y)p'(y)$, és az új differenciálegyenlet $2ypp' = p^2$, azaz $2yp' = p$, és az új differenciálegyenletben y a változó, és p a keresett függvény (p-vel leoszthattunk, mert a $p \equiv 0$ megoldás így is megmaradt). Ez szétválasztható:

$$\frac{2p'}{p} = \frac{1}{y} \quad \text{vagy} \quad p \equiv 0$$

$$\int \frac{2}{p}\,dp = \int \frac{1}{y}\,dy$$

$$2\ln|p| = \ln|y| + C = \ln e^C|y|$$

$$p = A\sqrt{|y|} \quad (A \in \mathbb{R})$$

$$y' = A\sqrt{y} \text{ ha } y > 0$$

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} = A$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{y}}\,dy = \int A\,dx$$

$$2\sqrt{y} = Ax + B$$

$$y = \frac{1}{4}(Ax + B)^2.$$

Ha $y > 0$, akkor ennek a (-1)-szeresét kapjuk, és ezek már magukban foglalják a $p \equiv 0$ esetben kapott szinguláris konstans megoldásokat is.

c) $z = y', \ z' = y''$ helyettesítéssel

$$2z' + z^3 = 0$$

$$-\frac{2z'}{z^3} = 1 \text{ vagy } z \equiv 0$$

$$\int -\frac{2}{z^3}\,dz = \int 1\,dx$$

$$\frac{1}{z^2} = x + c$$

$$y' = z = \pm\frac{1}{\sqrt{x+c}}$$

$$y = \int \pm\frac{1}{\sqrt{x+c}}\,dx = \pm 2\sqrt{x+c} + a$$

vagy $z \equiv 0$ esetén $y \equiv a$.

d) $z = y'$, $z' = y''$ helyettesítéssel, és átrendezéssel:

$$z' - \frac{1}{x \ln x} z = \ln x.$$

Ezt az elsőrendű inhomogén lineáris differenciálegyenletet multiplikátorral oldjuk meg. $p(x) = -\frac{1}{x\ln x}$, $\int -\frac{1}{x \ln x}\,dx = -\ln|\ln x| + C \;\Rightarrow\; e^{P(x)} = e^{-\ln(\ln x)} = \frac{1}{\ln x}$ megfelel multiplikátornak.

$$\frac{1}{\ln x} z' - \frac{1}{x(\ln x)^2} z = 1$$

$$\left(\frac{1}{\ln x} z\right)' = 1$$

$$\frac{1}{\ln x} z = x + C$$

$$y' = z = x \ln x + C \ln x.$$

$y = \int (x+C)\ln x\,dx = \frac{1}{2}(x+C)^2 \ln x - \frac{1}{2}\int \frac{(x+C)^2}{x}\,dx =$
$= \frac{1}{2}(x+C)^2 \ln x - \int \frac{1}{2}x + C + \frac{C^2}{2x}\,dx = \frac{1}{2}(x+C)^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 - Cx - \frac{C^2}{2}\ln x + D =$
$= (\frac{1}{2}x^2 + Cx)\ln x - Cx - \frac{1}{4}x^2 + D.$

e) Az $y' = p(y)$, $y'' = pp'$ helyettesítéssel:

$$pp'(1+y^2) = yp^2$$

$$\frac{p'}{p} = \frac{y}{1+y^2} \text{ vagy } p \equiv 0$$

$$\int \frac{1}{p}\,dp = \int \frac{y}{1+y^2}\,dy$$

$$\ln|p| = \frac{1}{2}\ln(1+y^2) + c$$

$$y' = p = A\sqrt{1+y^2}$$

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y^2}} = A$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\,dy = \int A\,dx$$

$$\operatorname{arsh} y = Ax + B$$

$$y = \mathrm{sh}(Ax + B) \ (A, B \in \mathbb{R} \text{ tetsz. }).$$

2. *Oldjuk meg a következő állandó együtthatós, homogén, lineáris differenciálegyenleteket!*
a) (Pt 29/29) $y'' - 5y' + 6y = 0$
b) (Pt 29/42) $y'' - 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$
c) (Pt 29/52) $y'' + 4y = 0$
d) $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$

Megoldás: a) A karakterisztikus egyenlet $m^2 - 5m + 6 = 0$, aminek a gyökei $m = 2, 3$, a d.e. alapmegoldásai e^{2x} és e^{3x}, az általános megoldása $y = c_1e^{2x} + c_2e^{3x}$.
b) A karakterisztikus egyenlet $m^2 - 6m + 9 = (m - 3)^2 = 0$, tehát 3 kétszeres gyök $\Rightarrow$ az alapmegoldások e^{3x} és xe^{3x}, a d.e. általános megoldása pedig $y = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x}$. A kezdeti feltételek: $y(0) = 1 \Rightarrow c_1 = 1$, és $y' = 3c_1e^{3x} + c_2(1 + 3x)e^{3x}$, $y'(0) = 2 \Rightarrow 3c_1 + c_2 = 2 \Rightarrow c_2 = -1$. Tehát a kezdetiérték-probléma megoldása $e^{3x} - xe^{3x}$.
c) $m^2 + 4 = 0$ gyökei $m = \pm 2i$, a $2i$-hez tartozó alapmegoldások $\cos 2x$ és $\sin 2x$, az általános megoldás $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$.
d) A karakt. egyenlet $m^4 + 2m^2 + 1 = (m^2 + 1)^2 = 0$, azaz $(m - i)^2(m + i)^2 = 0$. Tehát i kétszeres gyök, és a hozzá tartozó alapmegoldások $\cos x$, $\sin x$, $x \cos x$, $x \sin x$, a d.e. általános megoldása pedig $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3x \cos x + c_4x \sin x$.

3. *Írjuk fel az általános megoldását annak a homogén, lineáris differenciálegyenletnek, amelynek karakterisztikus egyenlete* $m^2(m - 1)^3(m^2 + 1)$*. Melyik ez a differenciálegyenlet?*

Megoldás: $y = c_1 + c_2x + c_3e^x + c_4xe^x + c_5x^2e^x + c_6 \cos x + c_7 \sin x$.
$m^2(m - 1)^3(m^2 + 1) = m^7 - 3m^6 + 4m^5 - 4m^4 + 3m^3 - m^2 \Rightarrow$
a differenciálegyenlet: $y^{(7)} - 3y^{(6)} + 4y^{(5)} - 4y^{(4)} + 3y''' - y'' = 0$.

4. *Milyen próbafüggvényt használnánk ahhoz az állandó együtthatós, inhomogén, lineáris differenciálegyenlethez, amelynek jobb oldalán a következő függvény áll? A karakterisztikus egyenlet milyen gyökei esetén kell még alkalmas x-hatvánnyal megszorozni a próbafüggvényt?*

a) $5x^2 - 1$ *b)* $x \cos 3x$ *c)* $e^{2x} \sin x$

Megoldás: a) $y_p = Ax^2 + Bx + C$. Ha a 0 s-szeres gyöke a karakt. egyenletnek, akkor ezt még meg kell szorozni x^s-nel.
b) $y_p = (Ax + B) \cos 3x + (Cx + D) \sin 3x$. Ha a $3i$ s-szeres gyöke a karakt. egyenletnek, akkor ezt még meg kell szorozni x^s-nel.
c) $y_p = Ae^{2x} \cos x + Be^{2x} \sin x$. Ha a $2 + i$ s-szeres gyöke a karakt. egyenletnek, akkor ezt még meg kell szorozni x^s-nel.

5. *Oldjuk meg a következő inhomogén, lineáris differenciálegyenleteket!*
a) (Pt 29/88) $y'' + 2y' + y = \sin x$
b) $y'' + 2y' + y = xe^{-x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$
c) (Pt 29/94, csak más kezdeti értékek) $y'' + y = -4 \cos x, \quad y(\pi) = 0, \quad y'(\pi) = \pi$
d) $y''' - y'' - 2y' = x^3 + e^x$

Megoldás: a) A karakt. egyenlet $m^2 + 2m + 1 = (m + 1)^2 = 0$, tehát a -1 kétszeres gyök, az homogén $y'' + 2y' + y = 0$ egyenlet alapmegoldásai e^{-x} és xe^{-x}, és a homogén d.e. általános megoldása $y_h = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x}$.
A próbafüggvény az inhomogén d.e.-hez:
$y_p = A \cos x + B \sin x$
$y_p' = -A \sin x + B \cos x$
$y_p'' = -A \cos x - B \sin x$

Behelyettesítve:
$2B\cos x - 2A\sin x = \sin x$
$2B = 0,\ 2A = -1,\ \Rightarrow A = -\frac{1}{2},\ B = 0 \Rightarrow$
$y = -\frac{1}{2}\cos x + c_1e^{-x} + c_2xe^{-x}$

b) $y_h = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x}$, mint az előbb. Az inhomogén d.e.-hez tartozó próbafüggvény:
$y_p = (Ax+B)e^{-x}\cdot x^2 = (Ax^3+Bx^2)e^{-x}$
$y_p' = (-Ax^3 + (3A-B)x^2 + 2Bx)e^{-x}$
$y_p'' = (Ax^3 + (-6A+B)x^2 + (6A-4B)x + 2B)e^{-x}$
Behelyettesítve:
$(0x^3 + 0x^2 + 6Ax + 2B)e^{-x} = xe^{-x} \quad\Rightarrow$
$6a = 1,\ 2B = 0 \Rightarrow A = \frac{1}{6},\ B = 0 \ \Rightarrow$
$y = \frac{1}{6}x^3e^{-x} + c_1e^{-x} + c_2xe^{-x}.$

c) A karakterisztikus egyenlet $m^2+1=0$, gyökei $\pm i$. A homogén d.e. alapmegoldásai $\cos x$ és $\sin x$, a homogén d.e. általános megoldása $c_1\cos x + c_2\sin x$. Próbafv. az inhomogénhez:
$y_p = (A\cos x + B\sin x)\cdot x = Ax\cos x + Bx\sin x$
$y_p' = A\cos x + B\sin x + Bx\cos x - Ax\sin x$
$y_p'' = 2B\cos x - 2A\sin x - Ax\cos x - Bx\sin x$
Behelyettesítve: $2B\cos x - 2A\sin x = -4\cos x \ \Rightarrow\ 2b = -4,$
$-2A = 0 \Rightarrow\ A = 0,\ B = -2 \ \Rightarrow$
$y = -2x\sin x + c_1\cos x + c_2\sin x$. A k.é.p. megoldása: $y = (\pi - 2x)\sin x$.

d) A karakterisztikus egyenlet $m^3 - m^2 - 2m = m(m-2)(m+1) = 0$. A gyökök $0, 2, -1$ (mindegyik egyszeres), a homogén általános megoldása $y_h = c_1 + c_2e^{2x} + c_3e^{-x}$
Az $y''' - y'' - 2y' = x^3$ inhomogén d.e.-re a próbafv.:
$y_{p1} = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\cdot x = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx$
$y_{p1}' = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx + C$
$y_{p1}'' = 12Ax^2 + 6Bx + 2C$
$y_{p1}''' = 24Ax + 6B$
Behelyettesítve:
$-8Ax^3 + (-12A - 6B)x^2 + (24A - 6B - 4C)x + (6B - 2C - 2D) = x^3 \ \Rightarrow$
$A = -\frac{1}{8},\ B = -2A = \frac{1}{4},\ C = 6A - \frac{3}{2}B = -\frac{9}{8},\ D = 3B - C = \frac{15}{8} \ \Rightarrow$
$y_{p1} = -\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{8}x^2 + \frac{15}{8}x$. Az $y''' - y'' - 2y' = e^x$ inhomogén d.e.-re a próbafv.:
$y_{p2} = Ae^x$.
$y_{p2}' = y_{p2}'' = y_{p3}''' = Ae^x$ behelyettesítve: $(A - A - 2A)e^x = e^x \quad\Rightarrow\quad A = -\frac{1}{2} \ \Rightarrow$
$y_{p2} = -\frac{1}{2}e^x$.
A megoldás $y = y_{p1} + y_{p2} + y_h = -\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{8}x^2 + \frac{15}{8}x^2 - \frac{1}{2}e^x + c_1 + c_2e^{2x} + c_3e^{-x}$.

6. *Ellenőrizzük, hogy a megadott függvények alaprendszerét alkotják a megadott lineáris differenciálegyenlethez tartozó homogén differenciálegyenletnek, és ezután oldjuk meg az inhomogént az állandók variálásának módszerével!*

a) (Pt 29/72) $xy'' + (x-1)y' - y = x^2, \quad y_1 = e^{-x}, \quad y_2 = x - 1$
b) (Pt 29/79) $xy'' - \frac{6}{x}y = 6x^3, \quad y_1 = \frac{1}{x^2}, \quad y_2 = x^3$
c) (Pt 29/83) $xy''' - y'' - xy' + y = x^2, \quad y_1 = x, \quad y_2 = \operatorname{ch} x, \quad y_3 = \operatorname{sh} x$

Megoldás:

a) $y_1 = e^{-x},\ y_1' = -e^{-x},\ y_1'' = e^{-x}$. Behelyettesítve: $xe^{-x} - (x-1)e^{-x} - e^{-x} = 0$.
$y_2 = x - 1,\ y_2' = 1,\ y_2'' = 0$. Behelyettesítve: $x\cdot 0 + (x-1)\cdot 1 - (x-1) = 0$.
Tehát y_1 és y_2 is megoldásai a homogén d.e.-nek, és függetlenek is, mert

$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-x} & x-1 \\ -e^{-x} & 1 \end{vmatrix} = xe^{-x}$ nem azonosan nulla.

Az inhomogén d.e. megoldása $y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$ alakú. A $c_1(x)$ és $c_2(x)$ meghatározásához az egyenlet “normált ” formáját használjuk:

$$y'' + \frac{x-1}{x}y' - \frac{1}{x}y = x.$$

$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ x & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x-1 \\ x & 1 \end{vmatrix} = -x^2 + x, \quad W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & x \end{vmatrix} = xe^{-x}$

$c_1'(x) = \frac{W_1}{W} = \frac{-x^2+x}{xe^{-x}} = (-x+1)e^x \ \Rightarrow$

$c_1(x) = \int (-x+1)e^x\,dx = (-x+1)e^x - \int -1 \cdot e^x\,dx = (-x+1)e^x + e^x + c_1 = (-x+2)e^x + c_1$

$c_2'(x) = \frac{W_2}{W} = \frac{xe^{-x}}{xe^{-x}} = 1 \ \Rightarrow c_2(x) = \int 1\,dx = x + c_2.$

Így $y = ((-x+2)e^x + c_1)e^{-x} + (x+c_2)(x-1) = x^2 - 2x + 2 + c_1e^{-x} + c_2(x-1).$

b) $y_1 = x^{-2},\ y_1' = -2x^{-3},\ y_1'' = 6x^{-4}$. Behelyettesítve: $6x^{-3} - 6x^{-3} = 0.$

$y_2 = x^3,\ y_2' = 3x^2,\ y_2'' = 6x$. Behelyettesítve: $6x^2 - 6x^2 = 0$. Függetlenek is: $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^{-2} & x^3 \\ -2x^{-2} & 3x^2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0.$

A d.e. normált alakban: $y'' - \frac{6}{x^2}y = 6x^2$. (A konstans tag eredetileg hibásan volt a feladatban, ez már a javított változat.)

$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & x^3 \\ 6x^2 & 3x^2 \end{vmatrix} = -6x^5, \quad W_2 = \begin{vmatrix} x^{-2} & 0 \\ -2x^{-3} & 6x^2 \end{vmatrix} = 6.$

$c_1'(x) = \frac{W_1}{W} = -\frac{6}{5}x^5 \ \Rightarrow\ c_1(x) = -\frac{1}{5}x^6 + c_1.$

$c_2'(x) = \frac{W_2}{W} = \frac{6}{5} \ \Rightarrow\ c_2(x) = \frac{6}{5}x + c_2.$ $y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_1 = x^4 + c_1x^{-2} + c_2x^3.$

c) $y_1 = x,\ y_1' = 1,\ y_1'' = y_1''' = 0$. Behelyettesítve: $0 - 0 - x + x = 0.$

$y_2 = \operatorname{ch} x,\ y_2' = \operatorname{sh} x,\ y_2'' = \operatorname{ch} x,\ y_2''' = \operatorname{sh} x.$

Behelyettesítve: $x\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x - x\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x = 0.$

$y_3 = \operatorname{sh} x,\ y_3' = \operatorname{ch} x,\ y_3'' = \operatorname{sh} x,\ y_3''' = \operatorname{ch} x.$

Behelyettesítve: $x\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x - x\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = 0.$

$W = \begin{vmatrix} x & \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x \\ 1 & \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x \\ 0 & \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x \end{vmatrix} = x(\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x) - 1(\operatorname{ch} x \operatorname{sh} x - \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x) = -x$ nem azonosan nulla. A d.e. normált alakja: $y''' - \frac{1}{x}y'' - y' + \frac{1}{x}y = x.$

$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x \\ 0 & \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x \\ x & \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x \end{vmatrix} = x, \quad W_2 = \begin{vmatrix} x & 0 & \operatorname{sh} x \\ 1 & 0 & \operatorname{ch} x \\ 0 & x & \operatorname{sh} x \end{vmatrix} = -x^2\operatorname{ch} x + x\operatorname{sh} x,$

$W_3 = \begin{vmatrix} x & \operatorname{ch} x & 0 \\ 1 & \operatorname{sh} x & 0 \\ 0 & \operatorname{ch} x & x \end{vmatrix} = x^2\operatorname{sh} x - x\operatorname{ch} x.$

$c_1'(x) = \frac{W_1}{W} = \frac{x}{-x} = -1 \Rightarrow c_1(x) = -x + c_1.$

$c_2'(x) = x\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x \Rightarrow c_2(x) = \int x\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x\,dx = -\operatorname{ch} x + x\operatorname{sh} x - \int \operatorname{sh} x\,dx = -2\operatorname{ch} x + x\operatorname{sh} x + c_2.$

$c_3'(x) = \operatorname{ch} x - x\operatorname{sh} x \Rightarrow c_3(x) = \int \operatorname{ch} x - x\operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{sh} x - x\operatorname{ch} x + \int \operatorname{ch} x\,dx = 2\operatorname{sh} x - x\operatorname{ch} x + c_3.$

$y = (-x+c_1)x + (-2\operatorname{ch} x + x\operatorname{sh} x + c_2)\operatorname{ch} x + (2\operatorname{sh} x - x\operatorname{ch} x + c_3)\operatorname{sh} x = -x^2 - 2\operatorname{ch}^2 x + 2\operatorname{sh}^2 x + c_1x + c_2\operatorname{ch} x + c_3\operatorname{sh} x = -x^2 - 2 + c_1x + c_2\operatorname{ch} x + c_3\operatorname{sh} x.$