Oldjuk meg az alábbi öt differenciálegyenletet!

1. $(x^2+1)y' + 2xy = \dfrac{1}{x^2}$ *(8 pont)*

Megoldás: I. módszer: elsőrendű lineáris, állandók variálásával:
Explicit alakban: $y' = -\frac{2x}{x^2+1}y + \frac{1}{x^2(x^2+1)}$.
$p(x) = -\frac{2x}{x^2+1}$, $q(x) = \frac{1}{x^2(x^2+1)}$. A megoldás $y = c(x)e^P(x)$ alakú, ahol $P'(x) = p(x)$, és ezt behelyettesítve $c'(x) = q(x)/e^{P(x)}$.
$P(x) = -\ln(x^2+1) = \ln\frac{1}{x^2+1}$, $e^{P(x)} = \frac{1}{x^2+1}$, $y = c(x)\frac{1}{x^2+1}$,
$c'(x) = \frac{1}{x^2(x^2+1)} \cdot (x^2+1) = \frac{1}{x^2}$, $c(x) = \int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + c$, $y = -\frac{1}{x(x^2+1)} + \frac{c}{x^2+1}$.
II. módszer: egzakt vagy egzakttá tehető?
Hozzuk $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ alakra!
$(2xy - \frac{1}{x^2}) + (x^2+1)y' = 0$, ahol
$P(x,y) = 2xy - \frac{1}{x^2}$ és $Q(x,y) = x^2+1$.
$P_y = 2x$, $Q_x = 2x \Rightarrow$ egzakt.
Kell $u(x,y)$, amelyre $u_x = P$ és $u_y = Q$.
$u_x = 2xy - \frac{1}{x^2}$, $u = \int 2xy - \frac{1}{x^2}\,dx = x^2y + \frac{1}{x} + c(y)$, $u_y = x^2 + c'(y) = x^2+1$,
$c'(y) = 1$, $c(y) = y + konst.$, így $u = x^2y + \frac{1}{x} + y$ megfelel.
A megoldás: $x^2y + \frac{1}{x} + y = C$ $(C \in \mathbb{R})$.
Expliciten is kifejezhető: $y = \frac{1}{x^2+1}(C - \frac{1}{x})$.

2. $y''' + 2y'' + 2y' = x$ *(8 pont)*

Megoldás: Lineáris, állandó együtthatós, "szép" jobb oldallal (próbafüggvényes megoldás):
Karakterisztikus egyenlet: $m^3 + 2m^2 + 2m = 0$, ennek a gyökei 0 és $-1 \pm i$, mindegyik egy multiplicitással.
A homogén d.e. megoldásai: $c_1 + c_2e^{-x}\cos x + c_3e^{-x}\sin x$.
A jobb oldalhoz tartozó próbafüggvény $Ax + B$ lenne, de mivel 0 egyszeres gyöke a karakterisztikus egyenletnek, ezt x-szel be kell szorozni.
$y_p = Ax^2 + Bx$, $y_p' = 2Ax + B$, $y_p'' = 2A$, $y_p''' = 0$. Ezt behelyettesítve az inhomogén egyenletbe:
$4Ax + (4A + 2B) = x$, így $A = \frac{1}{4}$, $B = -\frac{1}{2}$, $y_p = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x$,
$y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + c_1 + c_2e^{-x}\cos x + c_3e^{-x}\sin x$.

3. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$ *(9 pont)*

Megoldás: Lineáris, állandó együtthatós, de nem szép jobb oldallal $\Rightarrow$ az inhomogén megoldásához az állandók variálását (Wronsky-determinánsos módszer) használjuk.
Karakterisztikus egyenlet: $m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2 = 0$. Gyöke 1, kétszeres multiplicitással $\Rightarrow$ a homogén alapmegoldásai: e^x és xe^x.

$$W = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{vmatrix} = e^{2x},$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & xe^x \\ e^x/x & (x+1)e^x \end{vmatrix} = -e^{2x}, \qquad W_2 = \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & e^x/x \end{vmatrix} = e^{2x}/x.$$

$y = c_1(x)e^x + c_2(x)xe^x$, ahol $c_1'(x) = W_1/W$ és $c_2'(x) = W_2/W$.
$c_1(x) = \int -1\,dx = -x + c_1$, $c_2(x) = \int \frac{1}{x} = (\ln|x|) + c_2$.
$y = -xe^x + c_1e^x + xe^x\ln|x| + c_2xe^x$, vagy egyszerűbben, $y = xe^x\ln|x| + a_1e^x + a_2xe^x$, mert $a_2 = -1 + c_2$ is felvehet akármilyen értéket.

4. $y^2 + e^{-x} + 2yy' = 0, \;\; y(0) = 1$ *(10 pont)*

Megoldás: I. Elsőrendű, nem lineáris. Egzakt vagy egzakttá tehető? $P(x,y) = y^2 + e^{-x}$, $Q(x,y) = 2y$.

$P_y = 2y, \;\; Q_x = 0$, tehát nem egzakt. $\dfrac{P_y - Q_x}{Q} = 1$ csak x-től függ (mármint nem függ y-tól), tehát van $M(x)$ multiplikátor.

$\int 1\; dx = x + konst. \Rightarrow \ln M(x) = x$, azaz $M(x) = e^x$ megfelel multiplikátornak.

$y^2 e^x + 1 + 2ye^x y' = 0$. Itt

$P(x,y) = y^2 e^x + 1$ és $Q(x,y) = 2ye^x$-re $P_y = 2ye^x = Q_x$, tehát valóban egzakt.

Kell $u(x,y)$, hogy $u_x = P$ és $u_y = Q$.

$u = \int y^2 e^x + 1\; dx = y^2 e^x + x + c(y), \;\; u_y = 2ye^x + c'(y) = 2ye^x$, tehát $c'(y) = 0$, így $c(y)$ tetszőleges konstans.

$u(x,y) = y^2 e^x + x$ megfelel. A megoldás $y^2 e^x + x = C$. Az $(x,y) = (0,1)$ pont a kezdeti feltétel miatt rajta van a görbén, így $1 + 0 = C$.

Vagyis a megoldás $y^2 e^x + x = 1$. Expliciten: $y = \pm\sqrt{e^{-x} - xe^{-x}}$.

II. Egy trükkös megoldás: Vegyük észre, hogy $(y^2)' = 2yy'$, tehát $z(x) = y(x)^2$-re egy állandó együtthatós elsőrendű, lineáris, próbafüggvényes differenciálegyenletünk van:

$z' + z = -e^{-x}$.

A karakterisztikus egyenlet $m + 1 = 0$, egyetlen gyöke -1, multiplicitása egy,

tehát a homogén d.e. megoldása ce^{-x}.

Az inhomogénhez próbafüggvény $z_p = Axe^{-x}$ (az Ae^{-x}-et módosítani kellett, mert a -1 gyöke a karakterisztikus egyenletnek).

Behelyettesítve azt kapjuk, hogy $-Axe^{-x} + Ae^{-x} + Axe^{-x} = -e^{-x}$, tehát $A = -1$, és $z = -xe^{-x} + ce^{-x}$. A kezdeti feltételből $z(0) = y(0)^2 = 1$, tehát $c = 1$.

Vagyis $z = -xe^{-x} + e^{-x}$, azaz $y = \pm\sqrt{-xe^{-x} + e^{-x}}$.

5. $xy'' - y' = 1, \;\; y(1) = 0,\; y'(1) = 1$ *(10 pont)*

Megoldás: Másodrendű, lineáris, de nem állandó együtthatós

I. megoldás: x-szel való beszorzás után látjuk, hogy Euler-féle.

$x^2 y'' - xy' = x$. Mivel $x > 0$ helyen nézzük, az $x = e^t$ helyettesítést választjuk.

$\ddot{y} - \dot{y} - \dot{y} = e^t$, azaz $\ddot{y} - 2\dot{y} = e^t$.

A karakterisztikus egyenlet $m^2 - 2m = 0$, gyökei $0, 2$, egyszeres multiplicitással.

A homogén megoldásai $c_1 + c_2 e^{2t}$.

Az inhomogénhez próbafüggvény $y_p = Ae^t$, behelyettesítve $Ae^t - 2Ae^t = e^t$, azaz $A = -1$.

$y = -e^t + c_1 + c_2 e^{2t} = -x + c_1 + c_2 x^2$.

$y' = -1 + 2c_2 x$, így a kezdeti feltételekből $-1 + c_1 + c_2 = 0$ és $-1 + 2c_2 = 1$, tehát $c_2 = 1$ és $c_1 = 0$.

A megoldás $y = -x + x^2$.

II. megoldás: Hiányos másodrendű is (y hiányzik), így $z(x) = y'(x)$ behelyettesítéssel elsőrendűt kapunk:

$xz' - z = 1$, azaz $z' = \frac{1}{x}z + \frac{1}{x}$. Itt $p(x) = q(x) = \frac{1}{x}$-re a megoldás $z = c(x)e^{P(x)}$, ahol $P'(x) = p(x)$, és $c'(x) = q(x)e^{-P(x)}$.

$P(x) = \ln x$, $e^{P(x)} = x$ (mivel $x > 0$), és $c'(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}$. Tehát $c(x) = -\frac{1}{x} + c$,

és $y' = z = -1 + cx$, így $y = -x + \frac{c}{2}x^2 + a$.

Mivel $y' = -1 + cx$, a kezdeti feltételekből $-1 + \frac{c}{2} + a = 0$ és $-1 + c = 1$, így $c = 2$ és $a = 0$, vagyis

$y = -x + x^2$.

Laplace-transzformáció segítségével alakítsuk az alábbi, $y = y(t)$ függvényre felírt kezdetiérték-problémát az $Y = \mathcal{L}\{y;p\}$ függvényre vonatkozó algebrai egyenletté! (Megoldani nem kell sem az eredetit, sem a transzformáltat.)

6. $y'' - 2y' + y = t\cos t, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1$ *(5 pont)*

Megoldás: Legyen $\mathcal{L}\{y\} = Y$. Ekkor $\mathcal{L}\{y'\} = pY - y(0) = pY - 1$ és $\mathcal{L}\{y''\} = p\mathcal{L}\{y'\} - y'(0) = p^2Y - p + 1$.

Végül $\mathcal{L}\{t\cos t\} = -\mathcal{L}\{\cos t\}' = -\left(\frac{p}{p^2+1}\right)' = -\frac{1(p^2+1)-p\cdot 2p}{(p^2+1)^2} = \frac{p^2-1}{(p^2+1)^2}$.

Tehát a transzformált egyenlet: $p^2Y - p + 1 - 2pY + 2 + Y = \frac{-p^2+1}{(p^2+1)^2}$,

azaz $(p^2 - 2p + 1)Y = \dfrac{p^2 - 1}{(p^2+1)^2} + p - 3$.