**1.** Egy $G$ csoporthoz definiáljuk a $G^\circ = (G, *)$ csoportot, amelynek alaphalmaza megegyezik $G$ alaphalmazával, de a művelet a fordított sorrendben való szorzás: $a * b := b \cdot a$. Bizonyítsuk be, hogy $G^\circ \cong G$.

**2.** Legyen $K$ a $G$ csoport egy részhalmaza. Lássuk be, hogy $K$ legföljebb egy részcsoportnak lehet bal oldali mellékosztálya, és ha $K$ bal oldali mellékosztály, akkor alkalmas részcsoport szerint jobb oldali mellékosztály is.

**3.** Legyen $\mathbb{Z}$ az egész számok additív csoportja, és $m\mathbb{Z}$ ennek az $m > 1$ szám által generált részcsoportja. Mik lesznek a $\mathbb{Z}$ csoport $m\mathbb{Z}$ szerinti mellékosztályai?

**4.** Bizonyítsuk be, hogy $C_\infty$ minden nem triviális részcsoportja véges indexű, azaz véges sok mellékosztálya van.

**5.** Melyek igazak az alábbi következtetések közül?

a) Ha $|G| = 81$, és van olyan $g \in G$, amelyre $g^{29} \neq g^2$, akkor $G$ ciklikus.
b) Ha $|G| = 54$, és van olyan $g \in G$, amelyre $g^{29} \neq g^2$, akkor $G$ ciklikus.
c) Ha $|G| = 81$, és van olyan $g \in G$, amelyre $g^{29} = g^2$, akkor $G$ nem ciklikus.

**6.** Bizonyítsuk be a Dedekind-azonosságot: egy $G$ csoport tetszőleges $A$, $B$ és $C$ részcsoportjaira $A \leq C$ esetén $A(B \cap C) = AB \cap C$, ahol a szorzás a komplexusszorzást jelenti.

**7.** Bizonyítsuk be, hogy ha $\langle X \rangle = G$, és $\varphi, \psi : G \to H$ csoporthomomorfizmusok, továbbá $\varphi(x) = \psi(x)$ minden $x \in X$-re, akkor $\varphi = \psi$.

**8.** Legyen $\varphi : G \to H$ csoporthomomorfizmus, és $g \in G$. Bizonyítsuk be, hogy $o(\varphi(g)) \mid o(g)$.

**9.** Hányadrendű lehet egy hatodrendű elem képe a következő homomorfizmusoknál:
a) $C_6 \to C_{15}$ b) $C_6 \to C_{12}$ c) $C_{12} \to C_6$

**10.** Hány különböző homomorfizmus adható meg az alábbi csoportok között?
a) $C_{10} \to C_{33}$ b) $C_n \to C_n$ c) $C_n \to C_m$ d) $C_\infty \to C_n$ e) $C_n \to C_\infty$

**11.** Bizonyítsuk be, hogy egy csoport konjugált elemei mindig azonos rendűek, azaz $o(x) = o(y^{-1}xy)$ minden $x, y$-ra.

**12.** a) Adjuk meg az $a = (132)(45)$ permutációnak a $b = (254)$ permutációval vett konjugáltját, $b^{-1}ab$-t.
b) Melyek konjugáltak $S_6$-ban az $(1234)$ permutációval az $(123)$, $(4523)(16)$, $(4321)$ és $(24)(314)$ permutációk közül?
c) Hány különböző permutáció konjugálja $S_7$-ban az $(123)(45)(67)$ elemet önmagába? És az $(125)(63)(47)$ elembe?

**13.** Bizonyítsuk be a következő állításokat egy $G$ csoport konjugáltosztályairól!
a) Két konjugáltosztály komplexusszorzata teljes konjugáltosztályok uniója.
b) Ha $\mathcal{K}$ konjugáltosztály, akkor $\mathcal{K}^{-1}$ is az.
c) Egy $H$ részcsoport akkor és csak akkor normálosztó, ha teljes konjugáltosztályok uniója.
d) Konjugáltosztályok generátuma mindig normálosztó.

**14.** Legyen $f$ egy negyedrendű forgatás a $D_4$ diédercsoportban, és $t$ az egyik tengelyes tükrözés. Bizonyítsuk be, hogy $t^{-1}ft = tft = f^{-1}$. Határozzuk meg $D_4$ konjugáltosztályait! Mit mondhatunk általában $D_n$ konjugáltosztályairól?