**1.** Legyenek $G$ csoport, és $H \leq G$. Döntsük el, melyek igazak az alábbi állítások közül.

a) Mindig van olyan homomorfizmus $G$-ből, amelynek a magja $H$.
b) Ha $H \lhd G$, akkor van olyan homomorfizmus $G$-ből, amelynek a magja $H$.
c) Mindig van olyan homomorfizmus $G$-be, melynek a képe $H$.
d) Tetszőleges $\varphi : G \to K$ homomorfizmusnál $\varphi(H) \leq K$.
e) Ha $H \lhd G$, és $\varphi : G \to K$ homomorfizmus, akkor $\varphi(H) \lhd K$.
f) Ha $H \lhd G$, és $\varphi : G \to K$ homomorfizmus, akkor $\varphi(H) \lhd \varphi(G)$.
g) Tetszőleges $\varphi : G \to K$ homomorfizmusra $n \mid |G|$ esetén $n \mid |\varphi(G)|$.
h) Tetszőleges $\varphi : G \to K$ homomorfizmusra $n \mid |\varphi(G)|$ esetén $n \mid |G|$.

**2.** Legyen $|G| = 91$. Hány olyan $G \to G$ homomorfizmus van, ami $G$-nek legalább két, különböző rendű, az egységtől különböző elemét 1-be viszi?

**3.** Bizonyítsuk be, hogy ha $N \lhd G$, és $H \leq G$ úgy, hogy $H \cap N = \{ 1 \}$ és $HN = G$, akkor $G/N \cong H$.

**4.** Legyen $H \leq G$ és $M, N \lhd G$. Bizonyítsuk be, hogy
a) $H \cap N \lhd H$; $N \cap M \lhd G$;
b) $HN \leq G$; $NM \lhd G$;
c) $M \leq N$ esetén $G/N$ homomorf képe $G/M$-nek.

**5.** Legyen $N \lhd G$. Bizonyítsuk be, hogy a $H \mapsto H/N := \{ Nh \mid h \in H \}$ megfeleltetés bijekció a $G$ csoport $N$-et tartalmazó részcsoportjai és a $G/N$ faktorcsoport részcsoportjai között. Lássuk be azt is, hogy az előbb megadott bijekciónál a normálosztók egymásnak felelnek meg, és hogy ez a bijekció a részcsoportok közötti tartalmazási relációt is megőrzi.

**6.** Bizonyítsuk be, hogy ha $N \lhd G$, és $|G : N|$ páros, akkor van olyan $H$, amelyre $N \leq H \leq G$, és $|H : N| = 2$.

**7.** Legyen $g \in G$, és $o(g) = nm$, ahol $(n, m) = 1$. Bizonyítsuk be, hogy $g$ egyértelműen felírható $uv$ alakban, ahol $u, v \in \langle g \rangle$, $o(u) = m$, és $o(v) = n$.

**8.** Bizonyítsuk be, hogy ha $(n, m) = 1$, akkor $C_{nm} \cong C_n \times C_m$.

**9.** a) Lássuk be, hogy ha $(|H|, |K|) = 1$, akkor $G = H \times K$ minden részcsoportja $H_1 \times K_1$ alakú, ahol $H_1 \leq H$ és $K_1 \leq K$.
b) Keressünk $D_4 \times C_4$-ben olyan negyedrendű részcsoportot, amely nem áll elő a két komponens egy-egy részcsoportjának szorzataként!

**Hf1.** Legyen $H \leq G$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\bigcap_{g \in G} g^{-1}Hg$ a legnagyobb olyan normálosztója $G$-nek, amely benne van a $H$ részcsoportban.

**Hf2.** Legyenek $A$ és $B$ a $G$ csoport részcsoportjai, és tegyük föl, hogy $A$ és $B$ kommutatívak, és $G = AB$. Bizonyítsuk be, hogy $A \cap B$ normálosztója $G$-nek.

**Hf3.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy 60 elemű $G$ csoportnak van egy 28 elemű csoportba menő nem triviális (azaz nem minden elemet 1-be vivő) homomorfizmusa, akkor $G$-nek van 2 indexű részcsoportja.