1. Határozzuk meg a következő normálosztókkal vett faktorcsoportokat!
a) $G = GL(n, K)$, $N = SL(n, K)$;
b) $G = D_4$, $N = \langle f^2 \rangle$;
c) $G = (\mathbb{R}, +)$, $N = \mathbb{Z}$;
d) $G = Q^{\times}$, $N = \{\pm 1\}$;
e) $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, ahol $o(a) = 4$ és $o(b) = 6$, $N = \langle a^2 b^3 \rangle$.

2. Legyen $N \triangleleft G$, $H \le G$, $|G| = 24$, $|N| = 4$, és $|H| = 6$. Hány elemű lehet H képe a $G \to G/N$ homomorfizmusnál? Adjunk is példát mindegyik esetre!

3. Legyen $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ a kvaterniócsoport, amelyben $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$ $ji = -k$, $kj = -i$, $ik = -j$, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, és a -1-gyel való szorzás minden elemet az ellenkező előjelű változatába szoroz. Bizonyítsuk be, hogy így csoportot kapunk, és írjuk föl a műveleltábláját. Lássuk be, hogy Q minden részcsoportja normálosztó. Bizonyítsuk be, hogy Q nem írható föl kisebb csoportok szemidirekt szorzataként.

4. Bizonyítsuk be, hogy minden $s \mid n$-re a D_s diédercsoport előáll a D_n csoport részcsoportjaként és homomorf képeként is.

5. Hány negyedrendű eleme van A_8-nak?

6. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges olyan páratlan k számra, melyre $3 \le k \le n$, az A_n csoportot generálja az összes k-ciklus.

7. Bizonyítsuk be, hogy S_4-nek csak négy normálosztója van: 1, S_4, A_4 és az (..)(..) alakú elemeket és az 1-et tartalmazó négyelemű Klein-csoport.

8. Bizonyítsuk be, hogy A_4-nek nincs hatodrendű részcsoportja.

9. Határozzuk meg A_5 konjugáltosztályait!

Hf1. Legyen N normálosztó, H pedig egy részcsoport a 100-adrendű G csoportban. Bizonyítsuk be, hogy ha $|N| = 20$ és $|H| > 20$, akkor H-nak van 5 indexű részcsoportja!

Hf2. Bizonyítsuk be, hogy a $G \times G$ direkt szorzat diagonális részcsoportja, $T = \{(g, g) \mid g \in G\}$ akkor és csak akkor normálosztó, ha G Abel-csoport.

Hf3. Melyik az a legkisebb n, amelyre S_n, illetve A_n tartalmaz a 8-elemű D_4 diédercsoporttal izomorf részcsoportot?