1. Legyen $P \in Syl_p(G)$, és $H \le G$ p-csoport. Bizonyítsuk be, hogy ha $H \le N_G(P)$, akkor $H \le P$.

2. Bizonyítsuk be a 2. Sylow-tételt (azaz, hogy $|Syl_p(G)| \equiv 1 \pmod{p}$) a következő útmutatás alapján. Tekintsük a $P \in Syl_p(G)$ hatását a konjugálással a $Syl_p(G)$ alaphalmazon. Lássuk be, hogy P minden orbitja p-hatvány elemszámú, és közülük csak egy lehet egyelemű (ld. az 1. feladatot).

3. Bizonyítsuk be, hogy egy véges G csoport minden p-csoportja (legyen ez H) benne van a csoport valamelyik p-Sylow-részcsoportjában. Használjuk a 2. Sylow-tételt, és $Syl_p(G)$ orbitfelbontását a H-beli elemekkel való konjugálásnál.

4. a) Hány 3-, 5-, illetve 7-Sylow részcsoportja lehet egy 105 elemű G csoportnak?
b) Bizonyítsuk be, hogy ennek a csoportnak valamelyik p-Sylowja normálosztó!

5. Bizonyítsuk be, hogy egy 72 elemű csoport nem lehet egyszerű.

6. Izomorfia erejéig hány Abel-csoport van, amelynek rendje
a) 32;
b) 360?

7. Hány 12-edrendű részcsoportja van a $C_4 \times C_2 \times C_9$ Abel-csoportnak? Ebből hány nem ciklikus?

8. Bizonyítsuk be a kommutátor-részcsoportokról a következő állításokat!
a) $(G \times H)' = G' \times H'$;
b) $H \le G$ esetén $H' \le G' \cap H$, de nem feltétlenül egyenlők;
c) $\varphi : G \to H$ homomorfizmusra $\varphi(G') = (\varphi(G))'$.

9. Határozzuk meg a következő csoportok centrumát és kommutátor-részcsoportját!

a) S_n b) D_n c) egy p^3 rendű nem-Abel csoport d) $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{Z}_3,\ a, c \neq 0 \right\}$

10. Bizonyítsuk be, hogy ha H maximális valódi részcsoportja G-nek, akkor $H \ge Z(G)$ vagy $H \ge G'$.

Hf1. Bizonyítsuk be, hogy nincs 200 elemű egyszerű csoport!

Hf2. Adjuk meg az összes olyan 400-adrendű Abel-csoportot izomorfia erejéig, amelyben nincs 100-adrendű elem!

Hf3. Határozzuk meg az A_4 csoport kommutátor-részcsoportját!