1*. Bizonyítsuk be, hogy egy R véges kommutatív gyűrű akkor és csak akkor egységelemes, ha nincs olyan nem nulla eleme, amely R minden elemét annullálná, azaz bármely elemmel megszorozva 0-t adna.

2. Bizonyítsuk be, hogy egy egységelemes nullosztómentes gyűrűben minden jobbinverz balinverz is!

3. Mik lesznek a (jobb-, bal-, kétoldali) ideálok az alábbi gyűrűkben?
a) $\mathbb{Z}_n$;
b) $\mathbb{R}^{n\times n}$;
c) $\mathbb{R}[x]/(x^2+1)$;
d) $\mathbb{C}[x]/(x^2+1)$;
e) $\mathbb{Z}$ fölötti $n\times n$-es felső háromszögmátrixok gyűrűje.

4. Adjuk meg a $K[x,y]$ gyűrű (ahol K kommutatív test) x és y^2 által generált ideáljának elemeit. Adjuk meg a faktorgyűrűt az ideál mellékosztályainak egy alkalmas reprezentánsrendszerével. Mik az ideáljai a faktorgyűrűnek?

5. Bizonyítsuk be, hogy ha $R=2\mathbb{Z}$, és $R_1=\{(a,m)\,|\,a\in R,\ m\in\mathbb{Z}\}$ az R egységelemes gyűrűvé való szokásos kiterjesztése, akkor R nem izomorf $\mathbb{Z}$-vel.

6. Mi a páros egészek gyűrűjének, $2\mathbb{Z}$-nek a hányadosteste?

7. Bizonyítsuk be, hogy egy gyűrűnek akkor és csak akkor nincs valódi jobbideálja, ha ferdetest vagy prímrendű zérógyűrű.

8. Bizonyítsuk be, hogy minden véges integritási tartomány test.

9. Bizonyítsuk be, hogy a 2 és x által generált ideál nem főideál $\mathbb{Z}[x]$-ben.

10. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{Z}[i]=\{\,a+bi\,|\,a,b\in\mathbb{Z}\,\}$ euklideszi gyűrű.

Hf1. Bizonyítsuk be, hogy kommutatív gyűrűben a nilpotens elemek ideált alkotnak!

Hf2. Legyen R egységelemes kommutatív gyűrű. Bizonyítsuk be, hogy ha $I,J\triangleleft R$, és $I+J=R$, akkor $IJ=I\cap J$.

Hf3. Legyen $R=\mathbb{Z}[x]$, és I a 2 és x^2 által generált ideál R-ben. Bizonyítsuk be, hogy az R/I faktorgyűrű 4 elemű, és lássuk be, hogy R/I multiplikatív félcsoportja izomorf $\mathbb{Z}_4$ multiplikatív félcsoportjával.