1. Melyek főideálgyűrűk az alábbiak közül?

a) $\mathbb{Z}$ b) $\mathbb{R}$ c) $\mathbb{Z}[x]$ d) $\mathbb{R}[x]$ e) $\mathbb{Z}[i]$

2*. Bizonyítsuk be, hogy $K[x_1, \ldots, x_n]$-ben (ahol K test), az $(x_1, \ldots, x_n)$ ideál nem generálható n-nél kevesebb elemmel.

3. Mik az irreducibilis és a prím elemek a páros egészek gyűrűjében, $2\mathbb{Z}$-ben? Határozzuk meg $2\mathbb{Z}$ ideáljait és főideáljait.

4. Mutassuk meg:

a) $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ elemei (ahol $d \in \mathbb{Z}$ nem négyzetszám) egyértelműen írhatók $a + b\sqrt{d}$ alakban, ahol $a, b \in \mathbb{Z}$;
b) az $N(a + b\sqrt{d}) = a^2 - b^2 d$ norma multiplikatív;
c) $z, u \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$-re $z \mid u \Rightarrow N(z) \mid N(u)$;
d) $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$-ben z egység $\Leftrightarrow N(z) = \pm 1$.

5. Bontsuk fel prímek szorzatára a 7, 13 és $5 + i$ számokat $\mathbb{Z}[i]$-ben! Hány egymással nem asszociált prím faktora van $2 + 2i$-nek?

6. Legyen $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Adjuk meg 6-nak két (lényegesen) különböző, irreducibilis elemekre való felbontását R-ben.

7. Lássuk be, hogy ha $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ UFD (ahol d nem négyzetszám), akkor 2 nem irreducibilis $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$-ben.

8. Tegyük föl, hogy $d \in \mathbb{Z}$ négyzetmentes. Lássuk be, hogy

a) $d < 0$ esetén $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ UFD $\Leftrightarrow d = -1$ vagy -2.
b) $d \equiv 1 \; (\pmod 4)) \Rightarrow \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ nem UFD.

9. Tegyük föl, hogy az S test részgyűrűje az R egységelemes gyűrűnek, és $1 \in S$. Lássuk be, hogy ekkor R vektortér S fölött, és így véges R esetén $|R| = |S|^n$ valamely $n \in \mathbb{N}$-re!

10. Bizonyítsuk be, hogy ha $I, J \lhd R$-re $R = I + J$, akkor $R/(I \cap J) \cong R/I \oplus R/J$.

11. Legyen $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$, és tegyük fel, hogy f-nek nincs többszörös gyöke $\mathbb{C}$-ben. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{Q}[x]/(f(x))$ testek direkt összege.

Hf1. Legyen $R = A \oplus B$, $K \lhd R$, $1 \in R$. Bizonyítsuk be, hogy $K = K \cap A \oplus K \cap B$.

Hf2. Lássuk be, hogy egy R egységelemes integritási tartományban $a \in R$ akkor és csak akkor prím tulajdonságú, ha az $R/(a)$ faktorgyűrű nullosztómentes.

Hf3. Adjuk meg $\mathbb{Z}[i]$-ben a $2 + 6i$ szám irreducibilis elemekre való fölbontását! Az asszociált prímtényezőket vonjuk össze egy hatványba!

A házi feladatok beadási határideje: május 9.