1. *Legyen $H \leq S_n$, $|H| > 2$, és tegyük fel, hogy H-ban van páratlan permutáció. Bizonyítsuk be, hogy H nem lehet egyszerű.*

Megoldás: Belátjuk, hogy $A_n \cap H$ valódi normálosztója H-nak. Normálosztó, mert $A_n \lhd S_n$. $A_n \cap H < H$, mert H-ban van páratlan permutáció is. Végül $H/(A_n \cap H) \cong HA_n/A_n \leq G/A_n$, és ez utóbbi 2-elemű csoport, így $|H : A_n \cap H| \leq 2$, tehát $|H| > 2$ miatt $A_n \cap H \neq 1$.

2. *Legyen a G csoport rendje 2-nél nagyobb, páros, de 4-gyel nem osztható. Bizonyítsuk be, hogy G nem egyszerű.*

Megoldás: Tekintsük G-nek a Cayley-féle permutációreprezentációját, azaz hattassuk G elemeit a jobbszorzással G-n mint alaphalmazon. Ez hűséges permutációreprezentáció, tehát úgy tekinthetjük, hogy a G csoport (valójában egy izomorf képe) részcsoportja $S_{|G|}$-nek. Mivel $|G|$ páros, G-nek van másodrendű eleme. Ennek a ciklusfelbontása csak transzpozíciókból állhat, mivel a Cayley-reprezentációnál minden nemtriviális elem fixpontmentes, és a transzpozíciók száma, $|G|/2$ páratlan, tehát ez az elem páratlan permutáció. Az 1. feladat miatt G nem lehet egyszerű.

3. *Bizonyítsuk be az alábbi állításokat a centrumról:*
a) $Z(G \times H) = Z(G) \times Z(H)$;
b) $Z(G)$ minden részcsoportja normálosztó G-ben;
c) $N \lhd G \Rightarrow Z(N) \lhd G$.

Megoldás:
a) $Z(G \times H) = \{((g,h) \in G \times H \,|(g,h)(x,y) = (x,y)(g,h) \forall (x,y) \in G \times H\,\} = \{((g,h) \in G \times H \,|(gx,hy) = (xg,yh)\ \forall\ (x,y) \in G \times H\,\} = \{((g,h) \in G \times H \,|\, gx = xg$ és $hy = yh\ \forall\ (x,y) \in G \times H\,\} = \{((g,h) \,|\, g \in Z(G)$ és$h \in Z(H)\,\} = Z(G) \times Z(H)$.
b) Ha $H \leq Z(G)$, akkor minden $h \in H$-ra és $g \in G$-re $g^{-1}hg = hg^{-1}g = h \in H$, tehát $H \lhd G$.
c) $Z(N) \leq N \leq G$, és zárt a G-beli elemekkel való konjugálásra: ha $n \in Z(N)$, akkor $g \in G$-re $g^{-1}ng \in N$, mert $N \lhd G$, és minden $x \in N$-re $(g^{-1}ng)^{-1}x(g^{-1}ng) = g^{-1}n^{-1}(gxg^{-1})ng = g^{-1}(gxg^{-1})g = x$, mert $gxg^{-1} \in N$, és $n \in Z(N)$, így $g^{-1}ng \in Z(N)$.

4. *Lássuk be, hogy $Z(S_n) = 1$, ha $n \geq 3$, és $Z(A_n) = 1$, ha $n \geq 4$.*

Megoldás: Legyen $1 \neq g \in S_n$, és tegyük fel, hogy $ag = b$ az alaphalmaz valamely $a \neq b$ elemeire. Ekkor $n \geq 3$ esetén $x = (bc) \in S_n$ elemmel (ahol $c \notin \{\,a,b\,\}$) $h = g^x \neq g$, mert $ah = c$, tehát $g \notin Z(S_n)$. Tehát $Z(S_n) = 1$. Ha viszont $n \geq 4$, akkor van az alaphalmaznak még legalább két eleme a-n és b-n kívül, mondjuk, c és d, és ekkor az $x = (bcd) \in A_n$ permutációval $h = g^x \neq g$, mert $ah = c \neq b$.

5. *Bizonyítsuk be, hogy $N \lhd G$, $|N| = 2$ esetén $N \leq Z(G)$.*

Megoldás: Legyen $N = \{\,1,n\,\}$. Mivel $N \lhd G$, minden $g \in G$-vel való konjugálás N-et N-be viszi, és $g^{-1}1g = 1$, tehát $g^{-1}ng = n$. Így $n \in Z(G)$, következésképpen $N \leq Z(G)$.

6. *Legyen G egy általános négyzetes hasáb szimmetriáinak csoportja. Határozzuk meg G orbitjait, ha a csoportot a csúcsokon, az éleken vagy a lapokon hattatjuk. Adjuk meg az orbitok egy-egy elemének stabilizátorát.*

Megoldás: Tegyük fel, hogy a hasábnak négy hosszú és nyolc rövid éle van. A csúcsok egyetlen nyolc elemű orbitot alkotnak, és a stabilizátor az egységelemen kívül a csúcson átmenő hosszú élen és a szemközti hosszú élen átfektetett síkra való tükrözést tartalmazza. Így $|G| = 8 \cdot 2 = 16$. Az élek között a 8 rövid és 4 hosszú él egy-egy orbitot alkot. Egy rövid élhez tartozó stabilizátor 2 elemű, és az él felező merőleges síkjára való tükrözés generálja, egy hosszú élhez tartozó stabilizátor 4 elemű, és az adott élen és a szemközti hosszú élen keresztülmenő síkra, továbbá az él felezőmerőleges síkjára való tükrözés generálják. (Az éleken való hatás is hűséges, mert minden csúcs előállítható két él metszéspontjaként.) A lapok közül a négyzetek egy 2 elemű, a téglalapok egy 4 elemű orbitot alkotnak. Egy négyzetlap stabilizátora D_4-gyel izomorf (a négyzet szimmetriáinak megfelelő térbeli egybevágóságokat tartalmazza), egy téglalapé pedig 4 elemű, $C_2 \times C_2$-vel izomorf. (A lapokon is hűséges a reprezentáció, mert minden csúcs előáll három lap metszéspontjaként.)

7. *Legyen $H < G$, $|G : H| \le n$, és $|G| > n!$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor G nem lehet egyszerű.*

Megoldás: Legyen $|G : H| = k$, és legyen $\varphi : G \to S_k$ a G-nek a H szerinti jobb mellékosztályokon való permutációreprezentációja. Ekkor $G/\operatorname{Ker}\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi \le S_k$, tehát $|G : \operatorname{Ker}\varphi| \le k! \le n!$, míg $|G| > n!$, tehát $\operatorname{Ker}\varphi \ne 1$. Másrészt $\operatorname{Ker}\varphi \le H < G$, tehát $\operatorname{Ker}\varphi$ valódi normálosztó G-ben.

8. *Bizonyítsuk be, hogy ha $P \in Syl_p(G)$, és $N \lhd G$, akkor $N \cap P \in Syl_p(N)$.*

Megoldás: $N \cap P \le P$, tehát a Lagrange-tétel miatt $N \cap P$ rendje is p-hatvány. Másrészt $|NP| = \dfrac{|N|\,|P|}{|N \cap P|}$, ezért $\dfrac{|N|}{|N \cap P|} = \dfrac{|NP|}{|P|}$, ami osztója $|G : P|$-nek, mivel $|NP|$ osztója $|G|$-nek. Viszont Sylow-részcsoport indexe nem osztható p-vel, így $|G : P|$, és ebből adódóan $|N : N \cap P|$ sem. Tehát $|N \cap P|$ a maximális p-hatvány, ami osztja N rendjét, azaz $N \cap P \in Syl_p(N)$.

9. *Melyik az a legkisebb S_n, amelyik tartalmaz a kvaterniócsoporttal izomorf részcsoportot?*

Megoldás: S_8-ban nyilván van Q-val izomorf részcsoport, ugyanis a Q csoport Cayley-reprezentációja ad egy beágyazást S_8-ba. Belátjuk, hogy S_7-ben nincs (és így a kisebb fokú S_n-ekben sincs) kvaterniócsoport. Ha Q benne lenne S_7-ben, S_n-ben léteznie kellene egy negyedrendű i elemnek, és egy másik negyedrendű j-nek, hogy $i^2 = j^2$. Az i, átcímkézéstől eltekintve csak (1234) vagy $(1234)(56)$ lehet, így $i^2 = (13)(24)$. Ez azt jelenti, hogy j 4-ciklusa (neki is pontosan egy 4-ciklusa van a rendje miatt) vagy (1234), vagy (1432), amiből ij^{-1} vagy ij fixen hagyja az $1, 2, 3, 4$ elemeket. Ez azt jelenti, hogy ij^{-1} vagy ij az $5, 6, 7$ elemeken ható harmadfokú szimmetrikus csoportnak eleme, tehát rendje nem lehet 4, holott a kvaterniócsoport megfelelő elemeire $ij^{-1} = -k$, $ij = k$ mindegyike negyedrendű. Ezzel ellentmondásra jutottunk.

10. *Hány 5-Sylow-részcsoportja lehet egy 80-adrendű csoportnak?*

Megoldás: Legyen $|G| = 80$, és $P \in Syl_5(G)$. Ekkor $|Syl_5(G)| = |G : N_G(P)| \mid |G : P| = 16$, másrészt $|Syl_5(G)| \equiv 1 \pmod 5$, tehát $|Syl_5(G)|$ csak 1 vagy 16 lehet.

11. *A Sylow-részcsoportok vizsgálatával bizonyítsuk be, hogy minden 15-ödrendű csoport ciklikus.*

Megoldás: A 3-Sylowok száma osztója 5-nek, és 3-mal osztva 1 maradékot ad, tehát 1, és az 5-Sylowok száma osztója 3-nak, és 5-tel osztva 1 maradékot ad, tehát szintén 1. Ez azt jelenti, hogy a 3-Sylow, és az 5-Sylow is normálosztó. Legyen $Syl_3(G) = \{ P \}$, és $Syl_5(G) = \{ Q \}$. Ekkor $P \cap Q = 1$, mert rendje osztója 3-nak és 5-nek is, továbbá $|PQ|$ osztható 5-tel és 3-mal is, így 15-tel is, tehát $PQ = G$. Ebből következik, hogy $G = P \times Q$. Mivel prímrendű csoport csak ciklikus lehet, $G = P \times Q \cong C_3 \times C_5 \cong C_{15}$.

12. *Bizonyítsuk be, hogy egy* 100*-adrendű csoport nem lehet egyszerű.*

Megoldás: Legyen $|G| = 100$, és $P \in Syl_5(G)$. Ekkor $|Syl_5(G)|$ osztója 4-nek, és 5-tel osztva 1 maradékot ad, tehát $|Syl_5(G)| = 1$, így $P \triangleleft G$.

13. *Lássuk be, hogy* p, q *különböző prímekre minden* pq *rendű csoport két ciklikus csoport szemidirekt szorzata.*

Megoldás: Legyen $p > q$, $|G| = pq$, továbbá $P \in Syl_p(G)$ és $Q \in Syl_q(G)$. Ekkor $|Syl_p(G)|$ osztója q-nak, és p-val osztva 1 maradékot ad, tehát csak 1 lehet, így P normálosztó. Mivel $P \cap Q$ rendje p-nek és q-nak is osztója, $P \cap Q = 1$, másrészt PQ rendjét p és q is osztja, tehát osztható pq-val, így $PQ = G$. Ezért $G = P \rtimes Q$.

Hf1. *Bizonyítsuk be, hogy* S_5*-ben nem lehet egy harmadrendű és egy ötödrendű elem szorzata negyedrendű, de* S_6*-ban lehet.*

Hf2. *Legyen* p *prím, és* $|G| = p^n$*, továbbá* $1 \neq N \triangleleft G$*. Bizonyítsuk be, hogy* $N \cap Z(G) \neq 1$.

Hf3. *Adjuk meg a* $\mathbb{Z}_2$ *fölötti* 3×3*-as invertálható mátrixok csoportjának,* $GL(3,2)$*-nek egy 2-Sylow-részcsoportját.*