

1. Döntsük el, hogy az alábbiak félcsoporthok vagy csoportok-e a megadott műveletekre nézve (1: félcsoport, 2: csoport, X: egyik sem).

- 1. $(\{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det A = 1 \}, \cdot)$;
- 2. $(\{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det A = 0 \}, \cdot)$;
- 3. $(\{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det A = 0 \}, +)$;
- 4. $(\{ \text{valós mátrixok} \}, +)$;
- 5. $(\{ a \in \mathbb{Z}_m \mid (a, m) = 1 \}, \cdot)$;
- 6. $(\{ a \in \mathbb{Z}_m \mid (a, m) \neq 1 \}, \cdot)$;
- 7. $(\mathbb{R}^3, \text{skaláris szorzás})$;
- 8. $(\mathbb{R}^3, \text{vektoriális szorzás})$;
- 9. $(P(H), \cap)$;
- 10. $(\{ f : D \rightarrow \mathbb{R} \mid D \subseteq \mathbb{R} \}, \circ)$;
- 11. $(\{ f : H \rightarrow H \}, \circ)$;
- 12. $(\{ f : H \rightarrow H \mid f \text{ bijektív} \}, \circ)$;
- 13. $(\{ f : H \rightarrow H \mid f \text{ nem szürjektív} \}, \circ)$;
- +1. $(P(H), \text{szimmetrikus differencia})$

2. Adjunk példát olyan félcsoportra, amelyben minden elem idempotens, de a szorzás nem kommutatív!

3. Lássuk be, hogy egy véges félcsoportban minden elemnek van idempotens hatványa!

4. Bizonyítsuk be, hogy egy egységelemes félcsoportban
- a) ha a és b invertálható, akkor ab és ba is invertálható;
 - b) ha ab és ba invertálható, akkor a és b is invertálható.

Adjunk példát arra, hogy ab invertálhatóságából nem feltétlenül következik a vagy b invertálhatósága.

5. Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan $S = \{ a, b, c \}$ félcsoport, amelyre $ab = c$, $bc = a$ és $ca = b$. Van-e olyan félcsoport, amelynek ez részhalmaza?

6. Egészítsük ki a következő műveletábrát úgy, hogy félcsoportot kapjunk!

\cdot	a	b	c
a	a		c
b			
c	c	b	b

7. Hány egymással páronként nem izomorf 2 elemű félcsoport van? Melyiket lehet H^H -ba beágyazni (azaz melyiknek létezik injektív homomorfizmusa H^H -ba) egy alkalmas H halmazra?

8. Legyen S a $H = \{ 1, 2, 3 \}$ halmaz önmagába menő leképezéseinek félcsoportja a kompozícióval mint művelettel.

- a) Melyek azok az $a \in S$ elemek, amelyekre $a^2 = a$? Hány ilyen elem van S -ben?
- b) Mi az S egységeleme?
- c) Melyek azok az $a \in S$ elemek, amelyekre $a^2 = 1$? Hány ilyen elem van S -ben?
- d) Keressük meg S -nek egy olyan részfélcsoportját, amelynek műveletábrája (az elemek alkalmas elnevezésével) éppen az 5.b) feladatban kapott műveletábra.

Hf1. Írjuk fel a \mathbb{Z}_6 nullosztói által alkotott multiplikatív félcsoport műveletábráját!

Hf2. Keressünk a $H = \{ 1, 2, 3 \}$ halmazból önmagába menő leképezések félcsoportjában olyan az egységelemtől és egymástól különböző a, b elemeket, amelyekre $ab = ba$.

Hf3. Bizonyítsuk be, hogy egy véges egységelemes félcsoportban minden egyoldali inverz inverz is.