1. Lássuk be, hogy egy véges csoport minden részfélcsoportja részcsoport. Mutassunk ellenpéldát a végtelen esetben.

2. Bizonyítsuk be, hogy a K testből önmagába menő függvényeknek az $\{\, x \mapsto ax+b \mid a, b \in K,\ a \neq 0 \,\}$ részhalmaza csoportot alkot a kompozícióra nézve! Keressünk benne az egyeleműtől és a teljes csoporttól különböző részcsoportokat!

3. Legyen $f : S \to T$ egy félcsoport-homomorfizmus. Bizonyítsuk be, hogy
a) $\operatorname{Im} f \leq T$
b) minden idempotens elem képe idempotens;
c) minden idempotens elem teljes ősképe részfélcsoport;
d) egységelem és nullelem képe egységelem, illetve nullelem $\operatorname{Im} f$-ben, de nem feltétlenül az az egész T-ben (mutassunk ellenpéldát!);
e) egységelem képe egységelem, ha T csoport.

4. Legyen $H = \{\, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \,\}$, továbbá két reláció $R = \{(1,2), (2,3), (4,5), (1,6), (1,1)\,\}$ és $S = \{(1,3), (2,5), (4,6)\,\}$.
a) Határozzuk meg az $R \circ S$ relációt.
b) Mi az R-et, illetve S-et tartalmazó legkisebb $\overline{R}$ és $\overline{S}$ ekvivalenciareláció?
c) Adjuk meg az $\overline{R} \circ \overline{S}$ relációt. Ekvivalenciareláció-e ez is?

5. Hány különböző ekvivalenciareláció és hány definiálható egy négyelemű halmazon?

6. Legyenek R és S ugyanazon halmaznak két ekvivalenciarelációja. Bizonyítsuk be, hogy $R \subseteq S$ akkor és csak akkor teljesül, ha S minden osztálya az R néhány osztályának uniója.

7. Legyen $S = H^H$, ahol $H = \{\, 1, 2 \,\}$. Ennek a félcsoportnak a művelettáblája:

$\cdot$	**a**	**b**	**c**	**d**
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	c	c	c
d	d	d	d	d

a) Melyik elem melyik $H \to H$ leképezésnek feleltethető meg?
b) Határozzuk meg S-nek azt a legkisebb részfélcsoportját, amely tartalmaza a következő elemeket: b1) b; b2) b, c; b3) c, d.
c) Határozzuk meg S-nek azokat a kongruenciáit, amelyeknél az alábbi elemek kongruensek: c1) a és b; c2) a és c. Adjuk meg a megfelelő faktorfélcsoportok műveletttábláját is!

8. Legyen S egy jobbzéró félcsoport (azaz $xy = y$ minden $x, y \in S$-re). Határozzuk meg S összes kongruenciáját.

9. Legyen S egy véges kommutatív félcsoport, és definiáljuk S-en azt a $\sim$ kongruenciarelációt, amelyre $x \sim y$ akkor és csak akkor, ha van olyan $n, m \in \mathbb{N}$, amelyre $x^m = y^n$. Bizonyítsuk be, hogy
a) $\sim$ kongruenciareláció;
b) minden kongruenciaosztály egy félcsoport, amelyben egyetlen idempotens elem van;
c) az $S/\sim$ faktorfélcsoportnak csupa idempotens eleme van.

Hf1. Bizonyítsuk be, hogy egy egységelemes félcsoportban egy a elem akkor és csak akkor invertálható, ha van olyan x elem, amellyel $axa = 1$.

Hf2. Legyen S az $n \times n$-es valós mátrixok félcsoportja, és $\tilde{S}$ az a félcsoport, amelynek alaphalmaza megegyezik az S alaphalmazával, és a $*$-gal jelölt szorzást $A * B = B \cdot A$ definiálja. Lássuk be, hogy $\tilde{S}$ valóban félcsoport, és izomorf S-sel.

Hf3. Keressük meg a $\mathbb{Z}_5$ multiplikatív félcsoportjának összes kongruenciáját!