1. Hány szimmetriája, azaz az alakzatot önmagába vivő egybevágósági transzformációja van a következő síkbeli, illetve térbeli alakzatoknak? Írjuk le ezeket a transzformációkat!
a) négyzet
b) téglalap, ami nem négyzet
c) körlap
d) a sík két párhuzamos egyenes közötti része
e) kocka
f) szabályos tetraéder

2. Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathbb{R}^2$-ben vagy $\mathbb{R}^3$-ben egy alakzatnak van irányításváltó szimmetriája, akkor az irányításváltó és irányítástartó szimmetriáinak a száma megegyezik.

3. Bizonyítsuk be, hogy ha egy csoportban $x^2 = 1$ minden x elemre, akkor a csoport kommutatív!

4. Jelölje $o(g)$ egy g csoportelem rendjét. Bizonyítsuk be, hogy
a) ha $g^n = 1$, akkor $o(g)$ osztója n-nek;
b) ha $g \in G$, és $|G| = n$, akkor $o(g) \leq n$.

5. Hányadrendű elemek vannak
a) az $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ csoportban;
b) az $\mathbb{R}$ additív csoportjában;
c) a $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ csoportban;
d) a 2×2-es invertálható valós mátrixok multiplikatív csoportjában;
e*) a 2×2-es invertálható racionális mátrixok multiplikatív csoportjában;
f) a négyzet szimmetriáinak csoportjában?

6. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $g \in G$ csoportelemre
a) $o(g^{-1}) = o(g)$;
b) $k \in \mathbb{N}$-re $o(g^k) = \dfrac{o(g)}{(o(g), k)}$, ha $o(g)$ véges, és $o(g^k) = o(g)$, ha $o(g)$ végtelen.

7. Legyen H az S félcsoport egy nem üres részhalmaza, és $\langle H \rangle$ a H által generált részfélcsoport, azaz a H-t tartalmazó összes részfélcsoport metszete. Bizonyítsuk be, hogy $H = \{ h_1 h_2 \cdots h_r \mid h_1, \ldots, h_r \in H \}$.

8. Legyen H a G csoport egy nem üres részhalmaza, és $\langle H \rangle$ a H által generált részcsoport, azaz a H-t tartalmazó összes részcsoport metszete. Bizonyítsuk be, hogy $H = \{ h_1^{\pm 1} h_2^{\pm 1} \cdots h_r^{\pm 1} \mid h_1, \ldots, h_r \in H \}$.

9. Tegyük fel, hogy G ciklikus csoport, azaz $G = \langle a \rangle$ valamely $a \in G$-re. Határozzuk meg G részcsoportjait! Bizonyítsuk be, hogy ha $|G| = n$, akkor G minden részcsoportjának rendje osztója n-nek, és n minden osztójához egyetlen olyan rendű részcsoport van G-ben.

Hf1. Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_6$ multiplikatív félcsoportjában azt a legkisebb kongruenciát, amelyben 2 és 3 egy osztályba esnek, és adjuk meg a faktorfélcsoport művelettábláját is.

Hf2. Bizonyítsuk be, hogy egy csoportban $o(ab) = o(ba)$.

Hf3. Hány eleme van a $\mathbb{Z}_2$ fölötti invertálható 2×2-es mátrixok csoportjának? Adjunk meg benne egy harmadrendű elemet!