1. Ha a K testnek q eleme van, hány eleme van a K fölötti $n \times n$-es invertálható mátrixok csoportjának, $GL(n, K)$-nak, illetve a K fölötti $n \times n$-es 1 determinánsú mátrixok csoportjának, $SL(n, K)$-nak?

2*. Keressünk $GL(3, 2)$-ben másodrendű, harmadrendű és hetedrendű elemet! Bizonyítsuk be, hogy nics ebben a csoportban hatodrendű elem!

3. Legyen $\emptyset \neq H \subseteq G$. Bizonyítsuk be, hogy H akkor és csak akkor részcsoportja G-nek, ha $HH = H$, és $H^{-1} = H$.

4. Legyenek A és B a G csoport részcsoportjai. Lássuk be, hogy az $AB = \{\, ab \mid a \in A,\ b \in B \,\}$ komplexusszorzat akkor és csak akkor részcsoport, ha $AB = BA$.

5. Legyen A és B a G véges csoport két részcsoportja. Bizonyítsuk be, hogy $|AB| = \dfrac{|A| \cdot |B|}{|A \cap B|}$.

6. Bizonyítsuk be, hogy egy végtelen csoportnak mindig végtelen sok részcsoportja van.

7. Legyen K a G csoport egy részhalmaza. Lássuk be, hogy K legföljebb egy részcsoportnak lehet bal oldali mellékosztálya, és ha K bal oldali mellékosztály, akkor alkalmas részcsoport szerint jobb oldali mellékosztály is.

8. Legyen $H \leq G$ és $M, N \triangleleft G$. Bizonyítsuk be, hogy
a) $H \cap N \triangleleft H$; b) $HN \leq G$; c) $NM \triangleleft G$;

9. Legyen f a $90°$-os forgatás és t az egyik tengelyes tükrözés D_4-ben. Bizonyítsuk be, hogy $t^{-1}ft = tft = f^{-1}$, és hogy D_4 minden eleme felírható $f^k t^\ell$ alakban, ahol $k = 0, 1, 2, 3$ és $\ell = 0, 1$. Határozzuk meg az ft elemet tartalmazó legkisebb normálosztót D_4-ben.

10. Bizonyítsuk be, hogy a Q kvaterniócsoportban minden részcsoport normálosztó.

11. Bizonyítsuk be, hogy egy 154 elemű csoportnak minden legalább 23 elemű részcsoportja normálosztó.

12. Melyek igazak az alábbi következtetések közül?

a) Ha $|G| = 81$, és van olyan $g \in G$, amelyre $g^{29} \neq g^2$, akkor G ciklikus.
b) Ha $|G| = 54$, és van olyan $g \in G$, amelyre $g^{29} \neq g^2$, akkor G ciklikus.
c) Ha $|G| = 81$, és van olyan $g \in G$, amelyre $g^{29} = g^2$, akkor G nem ciklikus.

13. Bizonyítsuk be, hogy egy páros elemszámú véges csoportban mindig van másodrendű elem!

Hf1. Csoportot alkotnak-e a $(-1, 1)$ nyílt intervallum elemei az $a * b = \dfrac{a+b}{1+ab}$ műveletre mint szorzásra nézve?

Hf2. Legyenek A és B valódi részcsoportok G-ben. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $G \neq A \cup B$.

Hf3. Legyenek A és B a G csoport részcsoportjai, és tegyük föl, hogy A és B kommutatívak, és $G = AB$. Bizonyítsuk be, hogy $A \cap B$ normálosztója G-nek.