1. Legyenek G, K csoportok, H részcsoport G-ben. Döntsük el, melyek igazak az alábbi állítások közül.

a) Mindig van olyan φ homomorfizmus G-ről, melynek a magja H.
b) Mindig van olyan φ homomorfizmus G-re, melynek a képe H.
c) Tetszőleges $\varphi : G \to K$ homomorfizmusnál $\varphi(H)$ részcsoport lesz K-ban.
d) Ha H normálosztó G-ben, akkor $\varphi(H)$ is normálosztó K-ban.
e) Ha H normálosztó G-ben, akkor $\varphi(H)$ is normálosztó $\varphi(G)$-ben.
f) Ha H normálosztó G-ben, akkor létezik olyan $\varphi : G \to L$ homomorfizmus alkalmas L csoportba, melynek a magja H.
g) Tetszőleges φ homomorfizmusra, ha $n \mid |G|$, akkor $n \mid |\varphi(G)|$.
h) Tetszőleges φ homomorfizmusra, ha $n \mid |\varphi(G)|$, akkor $n \mid |G|$.

2. Határozzuk meg az alábbi típusú homomorfizmusok számát:
a) $C_6 \to C_{15}$ b) $C_\infty \to C_{30}$ c) $C_{30} \to C_\infty$ d) $C_2 \to D_4$ e) $D_4 \to C_2$

3. Határozzuk meg, mely más, ismert csoportokkal izomorfak az alábbi G/N faktorcsoportok:

a) $G = \mathbb{Z}_{12}$, a modulo 12 maradékosztályok additív csoportja, és $N = \{0, 4, 8\}$;
b) $G = \mathbb{C}$, a komplex számok additív csoportja, és $N = \mathbb{R}$;
c) $G = \mathbb{C}^*$, a komplex számok multiplikatív csoportja (azaz az alaphalmaz $\mathbb{C} \setminus \{0\}$), és $N = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$;
d) $G =$ a valós 3×3-as mátrixok additív csoportja, és $N =$ azoknak a mátrixoknak halmaza, amelyeknek a főátlójában csupa 0 szerepel;
e) $G = \mathbb{R}$, a valósak additív csoportja, és $\mathbb{N} = \mathbb{Z}$.

4. Legyen $|G| = 91$. Hány olyan $G \to G$ homomorfizmus van, ami G-nek legalább két, különböző rendű, az egységtől különböző elemét 1-be viszi?

5. Bizonyítsuk be, hogy ha $N \lhd G$ és $H \leq G$ úgy, hogy $H \cap N = \{1\}$ és $HN = G$, akkor $G/N \cong H$.

6. a) Legyen $N \lhd G$ és $N \leq K \leq G$. Bizonyítsuk be, hogy $K \lhd G$ akkor és csak akkor, ha $K/N \lhd G/N$.
b) Adjunk példát arra, hogy normálosztó normálosztója nem feltétlenül normálosztó az egész csoportban!

7. Legyen N normálosztó, H pedig egy részcsoport a 100-adrendű G csoportban. Bizonyítsuk be, hogy ha $|N| = 20$ és $|H| > 20$, akkor H-nak van 5 indexű részcsoportja!

8. Legyen $N \lhd G$ és $H_1 \lhd H_2 \leq G$. Bizonyítsuk be, hogy
a) $H_2 \cap N / H_1 \cap N$ normálosztóként beágyazható H_2/H_1-be;
b) H_2N/H_1N homomorf képe H_2/H_1-nek.

9. Hány kompozíciólánca van a D_4 diédercsoportnak, és mivel izomorfak a kompozíciófaktorok?

Hf1. Legyen G olyan véges csoport, amelynek egyetlen (valódi) maximális részcsoportja van. Bizonyítsuk be, hogy G ciklikus.

Hf2. Legyen G a 2-elemű test fölötti invertálható 3×3-as fölső háromszögmátrixok csoportja. A 8 elemű Q és D_4 csoportok közül melyikkel lehet izomorf ez a csoport?

Hf3. Bizonyítsuk be, hogy ha egy 60 elemű G csoportnak van egy 28 elemű csoportba menő nem triviális (azaz nem minden elemet 1-be vivő) homomorfizmusa, akkor G-nek van 2 indexű részcsoportja.