

1. a) Legyen  $N \triangleleft G$  és  $N \leq K \leq G$ . Bizonyítsuk be, hogy  $K \triangleleft G$  akkor és csak akkor, ha  $K/N \triangleleft G/N$ .  
b) Adjunk példát arra, hogy normálosztó normálosztója nem feltétlenül normálosztó az egész csoportban!
  2. Legyen  $N \triangleleft G$  és  $H_1 \triangleleft H_2 \leq G$ . Bizonyítsuk be, hogy  
a)  $H_2 \cap N/H_1 \cap N$  normálosztóként beágyazható  $H_2/H_1$ -be;  
b)  $H_2N/H_1N$  homomorf képe  $H_2/H_1$ -nek.
  3. a) Hány kompozíciólánca van  $C_n$ -nek, ha  $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$  az  $n$  kanonikus felbontása?  
b) Van-e olyan  $n$ -edrendű  $G$  csoport, aminek ennél több, illetve, aminek ennél kevesebb kompozíciólánca van?
  4. Adjuk meg a  $GF(3)$  fölötti  $2 \times 2$ -es invertálható felső háromszögmátrixok csoportjának egy kompozícióláncát! Mik a csoport kompozíciófaktorai?
  5. Írjuk föl transzpozíciók szorzataként az alábbi permutációkat:  
a)  $(1\ 2\ 3)(1\ 2\ 4)$ ;    b)  $(1\ 2\ 3 \dots n)$ ;    c)  $(n\ n-1 \dots 1)$ .
  6. Adjuk meg az alábbi permutációk diszjunkt ciklusfelbontását:  
a)  $(1\ 2\ 3\ 4\ 5)^{-1}(1\ 2\ 3)(4\ 5)(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$     b)  $(1\ 2)(1\ 2\ 3) \cdots (1\ 2\ 3 \dots n)$ ;  
c)  $(1\ 2\ 3)(1\ 2\ 4)(1\ 2\ 5) \cdots (1\ 2\ n)$ ;  
d)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & 2 \end{pmatrix}$ ;    e)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ;    f)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ .
  7. Ha  $k$  és  $n$  relatív prímek, akkor a  $k$ -val való szorzás egy permutációt definiál a modulo  $n$  maradékosztályok (redukált maradékosztályok) halmazán. Adjuk meg a 2-vel való szorzás ciklusfelbontását  $n = 5$ -re,  $n = 7$ -re és  $n = 9$ -re. Mikor lesz a redukált maradékosztályok  $k$ -val való szorzásának ciklusfelbontásában pontosan 1 darab ciklus? Mit mondhatunk általában a ciklusok hosszáról, ill. számáról?
  8. a) Milyen rendű elemek vannak  $S_4$ -ben,  $S_5$ -ben,  $A_5$ -ben?  
b) Hány hatodrendű elem van  $S_7$ -ben? Van-e  $S_{21}$ -ben 210-edrendű elem? Hát 25-ödrendű?  
c) Bizonyítsuk be, hogy  $A_4$ -nek nincs hatodrendű részcsoporthja.
  9. Számítsuk ki  $g^2$ -et,  $g^3$ -öt és  $g^{-1}$ -et, ha    a)  $g = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8)$     b)  $g = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7)$ .
  10. Mekkora a rendje a következő permutációknak? Melyek párosak, illetve páratlanok?  
a)  $(1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6\ 7)(8\ 9)$     b)  $(1\ 2\ 3)(2\ 3\ 4)$     c)  $(1\ 2\ 3)(3\ 4\ 5\ 6\ 7)(5\ 6\ 7)$
- Hf1.** Legyen  $H \leq G$ . Bizonyítsuk be, hogy ekkor  $\bigcap_{g \in G} g^{-1}Hg$  a legnagyobb olyan normálosztója  $G$ -nek, amely benne van a  $H$  részcsoporthban.
- Hf2.** Legyen  $G = \mathbb{Z}_{52}^\times$  a redukált maradékosztályok csoportja modulo 60 a szorzásra nézve. Adjuk meg a 3 által generált  $H$  részcsoporth elemeit! Ciklikus-e a  $G$  csoport, illetve a  $G/H$  faktorcsoporth?
- Hf3.** Keressünk a  $\mathbb{Z}_3$  fölötti  $2 \times 2$ -es invertálható felső háromszögmátrixok csoportjában maximális rendű olyan részcsoporthot, amely nem normálosztó!