$a, b \in G$ elemek kommutátora $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$.
$H, K \le G$ kommutátora $[H, K] = \langle [h, k] \mid h \in H,\ k \in K \rangle$.
G kommutátor részcsoportja $G' = [G, G]$.

1. Bizonyítsuk be, hogy
a) $[a, b] = 1 \iff ab = ba$;
b) $H \le G$ esetén $[H, G] \le H \iff H \triangleleft G$;
c) G/G' Abel-csoport;
d) Ha $\varphi : G_1 \to G_2$ homomorfizmus, akkor $\varphi(G_1') \le G_2'$.

2. Bizonyítsuk be, hogy $H \le G$-re

$$G' \le H \iff H \triangleleft G \text{ és } G/H \text{ Abel.}$$

3. Legyen $G^{(1)} = G'$ és $G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G^{(i)}]$ minden i-re. Bizonyítsuk be, hogy G akkor és csak akkor feloldható, ha van olyan r, amelyre $G^{(r)} = 1$.

4. Lássuk be, hogy feloldható csoport homomorf képe és részcsoportja is feloldható. Bizonyítsuk be, hogy ha $N \triangleleft G$, és N és G/N feloldható, akkor G is feloldható.

5. Bizonyítsuk be, hogy $S_n' = A_n$.

6. Bizonyítsuk be, hogy $Z(S_n) = 1$, ha $n > 2$.

7. Bizonyítsuk be, hogy $N \triangleleft G$ és $|N| = 2$ esetén $N \le Z(G)$.

8. Tegyük fel, hogy $G/Z(G)$ ciklikus. Lássuk be, hogy ekkor G Abel.

Hf1. Adjuk meg az összes olyan 400-adrendű Abel-csoportot izomorfia erejéig, amelyben nincs 100-adrendű elem.

Hf2. Hány hatodrendű elem van az $S_5 \times C_3$ csoportban?

Hf3. Bizonyítsuk be, hogy $G \times G$-ben a $\{(g, g) \mid g \in G\}$ részcsoport akkor és csak akkor normálosztó, ha G Abel.