1. Adjuk meg S_5 egy-egy Sylow-részcsoportját a 120 minden prímosztójára! Hány van az egyes prímekhez tartozó Sylow-részcsoportokból?

2. Bizonyítsuk be, hogy $|Syl_p(G)| = |G : N_G(P)|$, és ez osztója $|G : P|$-nek, ahol $P \in Syl_p(G)$.

3. Hány 5-Sylow-részcsoportja lehet egy 80-adrendű csoportnak?

4. A Sylow-részcsoportok vizsgálatával bizonyítsuk be, hogy minden 15-ödrendű csoport ciklikus.

5. Bizonyítsuk be, hogy egy 100-adrendű csoport nem lehet egyszerű.

6. Bizonyítsuk be, hogy egy 56-odrendű csoport nem lehet egyszerű.

7. a) Hány 3-, 5-, illetve 7-Sylow részcsoportja lehet egy 105 elemű G csoportnak?
b) Bizonyítsuk be, hogy ennek a csoportnak valamelyik p-Sylowja normálosztó!

8. Legyen G véges csoport, $H \leq G$, és $\Omega = \{ Hx \mid x \in G \}$ a H jobb oldali mellékosztályainak halmaza, továbbá $\varphi : G \to S_\Omega$ az a leképezés, amelyre $Hx\varphi(g) = Hxg$ minden $g, x \in G$-re. Bizonyítsuk be, hogy $\varphi(g)$ valóban permutáció minden g-re, és hogy φ csoporthomomorfizmus, amelynek a magja $\bigcap x \in Gx^{-1}Hx$.

9. Bizonyítsuk be, hogy S_n-nek nincs n-nél kisebb indexű részcsoportja az A_n-en és S_n-en kívül.

10. Bizonyítsuk be, hogy egy 72 elemű csoport nem lehet egyszerű.

11. Bizonyítsuk be, hogy a G csoport feloldható, ha G rendje prímhatvány, pq, pq^2 vagy p^2q^2, ahol p és q különböző prímek.

12. a) Bizonyítsuk be, hogy az x, y elemek által generált szabad csoportot az $\{ x, xy \}$ halmaz is szabadon generálja.
b) Bizonyítsuk be, hogy ugyanebben a csoportban a $Z = \{ x, y^{-1}xy, y^{-2}xy^2 \}$ halmaz szabadon generálja a $\langle Z \rangle$ részcsoportot.

13. Bizonyítsuk be a következő izomorfiákat a relációkkal megadott csoportokra.
a) $\big\langle x, y, z \,|\, x^2 = y^2 = z^3 = 1,\ xy = yx,\ z^{-1}xz = y \big\rangle \cong A_4$;
b) $\big\langle x, y \,|\, x^2 = y^2 = 1,\ xyxy = yxyx \big\rangle \cong D_4$;
c) $\big\langle x, y \,|\, x^2 = y^2 = 1 \big\rangle$ minden véges nem kommutatív homomorf képe izomorf valamelyik diéder csoporttal.

14. Bizonyítsuk be, hogy
a) $\big\langle x, y \,|\, y^{-1}xy = x^2,\ x^{-1}yx = y^2 \big\rangle = 1$
b*) $\big\langle x, y, z \,|\, y^{-1}xy = x^2,\ z^{-1}yz = y^2,\ x^{-1}zx = z^2 \big\rangle = 1$.

15. Adjuk meg definiáló relációkkal a következő csoportokat:
a) $C_2 \times C_2 \times C_4$ b) $C_3 \times C_8$ c) Q

Hf1. Határozzuk meg D_4 kommutátor részcsoportját.

Hf2. Bizonyítsuk be, hogy $C_{S_6}((12)(34))$ 2-Sylow-részcsoportja S_6-nak.

Hf3. Legyen $|G| = p^n q$, ahol p és q különböző prímek. Bizonyítsuk be, hogy a $H = G \times C_{p^n}$ csoport rendjének minden d osztójához van H-nak d-edrendű részcsoportja.