Algebra 1. **1. zh** *2009. március 26.*

1. Bizonyítsuk be, hogy a 2×2-es invertálható valós felső háromszögmátrixok a $GL(2, \mathbb{R})$-ben részcsoportot alkotnak, de normálosztót nem.

2. Tegyük fel, hogy H és K a G csoport két részcsoportja, továbbá $|G| = 80$, $|H| = 20$, és $|K| = 8$. Bizonyítsuk be, hogy $\langle H, K \rangle \lhd G$.

3. Legyen $G = \mathbb{Z}_{33}^{\times}$ a 33-hoz relatív prím maradékosztályok multiplikatív csoportja modulo 33, és H ennek a 4 által generált részcsoportja. Határozzuk meg a G/H faktorcsoport rendjét és a 8-at tartalmazó mellékosztály rendjét a faktorcsoportban. Ciklikus-e a G/H csoport?

4. Legyen $H = \{ a, b, c \}$ háromelemű halmaz, és $S = \{ f : H \to H | f(a) = a \}$. Bizonyítsuk be, hogy H-nak van nulleleme, azaz olyan z, amelyre $fz = zf = z$ minden $f \in S$-re. Hány olyan elem van S-ben, amelynek valahányadik hatványa z?

5. Legyenek az S négyelemű félcsoport elemei $\{ a, a^2, a^3, a^4 \}$, és tegyük fel, hogy $a^5 = a^2$. Határozzuk meg S összes olyan homomorf képét (másképpen faktorfélcsoportját) izomorfia erejéig, amely csoport.

6. Bizonyítsuk be, hogy a komplex háromhatványadik egységgyökök csoportot alkotnak a szorzásra nézve. Lássuk be, hogy ez a csoport nem ciklikus, de minden valódi részcsoportja véges ciklikus csoport.

Algebra 1. **1. zh** *2009. március 26.*

1. Bizonyítsuk be, hogy a 2×2-es invertálható valós felső háromszögmátrixok a $GL(2, \mathbb{R})$-ben részcsoportot alkotnak, de normálosztót nem.

2. Tegyük fel, hogy H és K a G csoport két részcsoportja, továbbá $|G| = 80$, $|H| = 20$, és $|K| = 8$. Bizonyítsuk be, hogy $\langle H, K \rangle \lhd G$.

3. Legyen $G = \mathbb{Z}_{33}^{\times}$ a 33-hoz relatív prím maradékosztályok multiplikatív csoportja modulo 33, és H ennek a 4 által generált részcsoportja. Határozzuk meg a G/H faktorcsoport rendjét és a 8-at tartalmazó mellékosztály rendjét a faktorcsoportban. Ciklikus-e a G/H csoport?

4. Legyen $H = \{ a, b, c \}$ háromelemű halmaz, és $S = \{ f : H \to H | f(a) = a \}$. Bizonyítsuk be, hogy H-nak van nulleleme, azaz olyan z, amelyre $fz = zf = z$ minden $f \in S$-re. Hány olyan elem van S-ben, amelynek valahányadik hatványa z?

5. Legyenek az S négyelemű félcsoport elemei $\{ a, a^2, a^3, a^4 \}$, és tegyük fel, hogy $a^5 = a^2$. Határozzuk meg S összes olyan homomorf képét (másképpen faktorfélcsoportját) izomorfia erejéig, amely csoport.

6. Bizonyítsuk be, hogy a komplex háromhatványadik egységgyökök csoportot alkotnak a szorzásra nézve. Lássuk be, hogy ez a csoport nem ciklikus, de minden valódi részcsoportja véges ciklikus csoport.